ESERCIZIO 1

Si consideri l'esperimento consistente nel lancio simultaneo di due monete. Calcolare la probabilità dei seguenti eventi:

nessuna croce	$P(\text{nessuna croce}) = P(\bar{C}_1 \cap \bar{C}_2) = P(\bar{C}_1)P(\bar{C}_2) = P(T_1)P(T_2) = = 0{,}5 \times 0{,}5 = 0{,}25$
nessuna testa	$P(\text{nessuna teste}) = P(\bar{T}_1 \cap \bar{T}_2) = P(\bar{T}_1)P(\bar{T}_2) = P(C_1)\,P(C_2) = = 0{,}5 \times 0{,}5 = 0{,}25$
1 testa	$P(1\ \text{teste}) = P\{(T_1 \cap C_2) \cup (C_1 \cap T_2)\} = P(T_1 \cap C_2) + P(C_1 \cap T_2) = = P(T_1)P(C_2) + P(C_1)P(T_2) = 0{,}5 \times 0{,}5 + 0{,}5 \times 0{,}5 = 0{,}5$
almeno 1 testa	$P(\text{almeno 1 teste}) = P\{1\ \text{testa} \cup 2\ \text{teste}\} = P\{(T_1 \cap C_2) \cup (C_1 \cap T_2) \cup (T_1 \cap T_2)\} = = P(T_1 \cap C_2) + P(C_1 \cap T_2) + P(T_1 \cap T_2) = P(T_1)P(C_2) + P(C_1)P(T_2) + P(T_1)P(T_2) = = 0{,}5 \times 0{,}5 + 0{,}5 \times 0{,}5 + 0{,}5 \times 0{,}5 = 0{,}75$
non più di 1 testa	$P(\text{non più di 1 teste}) = P\{0\ \text{teste} \cup 1\ \text{teste}\} = P\{(C_1 \cap C_2) \cup (T_1 \cap C_2) \cup (C_1 \cap T_2)\} = = P(C_1 \cap C_2) + P(T_1 \cap C_2) + P(C_1 \cap T_2) = P(C_1)P(C_2) + P(T_1)P(C_2) + P(C_1)P(T_2) = = 0{,}75$
non meno di 1 testa	$P(\text{non meno di 1 teste}) = P\{1\ \text{testa} \cup 2\ \text{teste}\} = P\{(T_1 \cap C_2) \cup (C_1 \cap T_2) \cup (T_1 \cap T_2)\} = = P(T_1 \cap C_2) + P(C_1 \cap T_2) + P(T_1 \cap T_2) = P(T_1)P(C_2) + P(C_1)P(T_2) + P(T_1)P(T_2) = = 0{,}75$

ESERCIZIO 2

Il signor Felice sta giocando a tombola nel circolo PASSATEMPO e ha deciso di giocare usando la sola cartella di seguito riportata:

7	17	26		40			74	
1	14				50	69		87
	13			43	57	62	73	
Serie 1, n. 1								

Calcolare la probabilità dei seguenti eventi:

P(fare ambo con i numeri 7 ed 17 con le prime due estrazioni):

$= P\{(7_{(1)} \cap 17_{(2)}) \cup (17_{(1)} \cap 7_{(2)})\} = P(7_{(1)} \cap 17_{(2)}) + P(17_{(1)} \cap 7_{(2)}) =$
$= P(7_{(1)})P(17_{(2)} \mid 7_{(1)}) + P(17_{(1)})P(7_{(2)} \mid 17_{(1)}) = \left(\frac{1}{90} \times \frac{1}{89}\right) + \left(\frac{1}{90} \times \frac{1}{89}\right) = 0{,}00025$

Si arriva allo stesso risultato come: $\boxed{\frac{2}{90} \times \frac{1}{89}}$

P(fare ambo sulla prima riga della cartella con le prime due estrazioni):

$\frac{5}{90} \times \frac{4}{89} = 0{,}0025$

P(fare ambo sulla seconda riga della cartella con le prime due estrazioni):

$\frac{5}{90} \times \frac{4}{89} = 0{,}0025$

P(fare ambo con le prime due estrazioni):

$P(\text{ambo I riga} \cup \text{ambo II riga} \cup \text{ambo III riga}) = P(\text{ambo I riga}) + P(\text{ambo II riga}) + P(\text{ambo III riga}) =$
$= 0{,}0025 \times 3 = 0{,}0075$

P(fare quintina sulla prima riga con le prime 5 estrazioni):

$\frac{5}{90} \times \frac{4}{89} \times \frac{3}{88} \times \frac{2}{87} \times \frac{1}{86} = 0{,}000000023$

P(fare quintina sulla seconda riga con le prime 5 estrazioni):

$\frac{5}{90} \times \frac{4}{89} \times \frac{3}{88} \times \frac{2}{87} \times \frac{1}{86}$

P(fare quintina con le prime 5 estrazioni):

$P\left(\underset{I\ riga}{quintina} \cup \underset{II\ riga}{quintina} \cup \underset{III\ riga}{quintina}\right) = P\left(\underset{I\ riga}{quintina}\right) + P\left(\underset{II\ riga}{quintina}\right) + P\left(\underset{III\ riga}{quintina}\right) =$

$= 3 \times 0{,}000000023$

ESERCIZIO 3

Si consideri la seguente tabella a doppia entrata riportante i dati relativi ad un campione di cittadini della città TOWN distinti per professione e per genere:

		GENERE		
		Uomo	Donna	
Professione	Dipendente	9	4	13
	Libero professionista	2	13	15
	Imprenditore	3	9	12
		14	26	40

Calcolare la probabilità che estraendo a caso un soggetto, questi sia un imprenditore:

$P(impr.) = \frac{12}{40} = 0{,}3$

Calcolare la probabilità che estraendo a caso un soggetto, questi sia un uomo:

$P(uomo) = \frac{14}{40} = 0{,}35$

Calcolare la probabilità che estraendo a caso un uomo, questi sia un imprenditore:

$P(imprenditore \mid uomo) = \frac{3}{14} = 0{,}21$

in alternativa: $\frac{P(imprenditore \cap Uomo)}{P(uomo)} = \frac{3/40}{14/40} = \frac{3}{14} = 0{,}21$

Calcolare la probabilità che estraendo a caso un imprenditore, questi sia un uomo:

$P(uomo \mid imprenditore) = \frac{3}{12} = 0{,}25$

Calcolare la probabilità che estraendo a caso un soggetto, questi sia un imprenditore uomo

$P(\text{imprenditore} \cap \text{uomo}) = \frac{3}{40} = 0{,}075$

in alternativa $P(\text{imprenditore}|\text{uomo})P(\text{uomo}) = \frac{3}{14} \times \frac{14}{40} = \frac{3}{40} = 0{,}075$

$P(\text{uomo}|\text{imprenditore})P(\text{imprendit.}) = \frac{3}{12} \times \frac{12}{40} = \frac{3}{40} = 0{,}075$

Verificare se gli eventi Professione=IMPRENDITORE e Genere=DONNA sono indipendenti:

$P(\text{imprenditore} \cap \text{donna}) = \frac{9}{40} = 0{,}225$

$P(\text{imprendit.})P(\text{donna}) = \frac{12}{40} \times \frac{26}{40} = 0{,}195$

non sono indipendenti

$P(A \cap B) \neq P(A)P(B)$

ESERCIZIO 4

Un'urna contiene due palline rosse, due palline bianche e due palline nere. Si effettua l'estrazione con ripetizione di due pallina dall'urna e si scommette sull'uscita di palline nere. Calcolare:

1) la probabilità di estrarre zero palline nere:

$P(0\ \text{nere}) = P(\bar{N}_1 \cap \bar{N}_2) = P(\bar{N}_1)P(\bar{N}_2) = \frac{2}{6} \times \frac{2}{6} = 0{,}11$

2) la probabilità di estrarre una pallina nera:

$P(1\ \text{nera}) = P\{(N_1 \cap \bar{N}_2) \cup (\bar{N}_1 \cap N_2)\} = P(N_1 \cap \bar{N}_2) + P(\bar{N}_1 \cap N_2) = P(N_1)P(\bar{N}_2) + P(\bar{N}_1)P(N_2) =$

$= \left(\frac{2}{6} \times \frac{4}{6}\right) + \left(\frac{4}{6} \times \frac{2}{6}\right) = 0{,}44$

3) la probabilità di estrarre due palline nere:

$P(2\ \text{nere}) = P(N_1 \cap N_2) = P(N_1)P(N_2) = \frac{2}{6} \times \frac{2}{6} = \frac{4}{36} = 0{,}11$

4) la probabilità di estrarre almeno una pallina nera:

$P(\text{almeno 1 nera}) = P(1\ \text{nera} \cup 2\ \text{nere}) = P(1\ \text{nera}) + P(2\ \text{nere}) = 0{,}55$

5) la probabilità di estrarre al più una pallina nera:

$P(\text{al più 1 nera}) = P(0\ \text{nere} \cup 1\ \text{nera}) = P(0\ \text{nere}) + P(1\ \text{nera}) = 0{,}55$

6) la probabilità di estrarre non meno di una palline nera:

$P(\text{non meno di 1 nera}) = P(1\ \text{nera} \cup 2\ \text{nere}) = P(1\ \text{nera}) + P(2\ \text{nere}) = 0{,}55$

$=$

$P(\text{almeno 1 nera})$

7) la probabilità di estrarre non più di una palline nera:

$P\left(\begin{smallmatrix}\text{non più}\\ \text{1 nere}\end{smallmatrix}\right) = P(\text{0 nere} \cup \text{1 nera}) = P(\text{0 nere}) + P(\text{1 nera}) = 0{,}55$

$\parallel$

$P(\text{al più 1 nera})$

ESERCIZIO 5

Un'urna contiene due palline rosse, due palline bianche e due palline nere. Si effettua l'estrazione senza ripetizione di due pallina dall'urna e si scommette sull'uscita di palline nere. Calcolare:

1) la probabilità di estrarre zero palline nere:

$P(\text{0 nere}) = P(\bar{N}_1 \cap \bar{N}_2) = P(\bar{N}_1)P(\bar{N}_2|\bar{N}_1) = \frac{4}{6} \times \frac{3}{5} = 0{,}4$

2) la probabilità di estrarre una pallina nera:

$P(\text{1 nera}) = P\{(N_1 \cap \bar{N}_2) \cup (\bar{N}_1 \cap N_2)\} = P(N_1 \cap \bar{N}_2) + P(\bar{N}_1)P(N_2) =$
$= P(N_1)P(\bar{N}_2|N_1) + P(\bar{N}_1)P(N_2|\bar{N}_1) = \left(\frac{2}{6} \times \frac{4}{5}\right) + \left(\frac{4}{6} \times \frac{2}{5}\right) = 0{,}53$

3) la probabilità di estrarre due palline nere:

$P(\text{2 nere}) = P(N_1 \cap N_2) = P(N_1)P(N_2|N_1) = \frac{2}{6} \times \frac{1}{5} = 0{,}067$

4) la probabilità di estrarre almeno una pallina nera:

$P\left(\begin{smallmatrix}\text{almeno 1}\\ \text{nera}\end{smallmatrix}\right) = P(\text{1 nera} \cup \text{2 nere}) = P(\text{1 nera}) + P(\text{2 nere}) = 0{,}597$

5) la probabilità di estrarre al più una pallina nera:

$P\left(\begin{smallmatrix}\text{al più 1}\\ \text{nera}\end{smallmatrix}\right) = P(\text{0 nere} \cup \text{1 nera}) = P(\text{0 nere}) + P(\text{1 nera}) = 0{,}93$

6) la probabilità di estrarre non meno di una palline nera:

$P\left(\begin{smallmatrix}\text{non meno}\\ \text{1 nera}\end{smallmatrix}\right) = P\left(\begin{smallmatrix}\text{almeno 1}\\ \text{nera}\end{smallmatrix}\right)$

7) la probabilità di estrarre non più di una palline nera:

$P\left(\begin{smallmatrix}\text{non più}\\ \text{1 nera}\end{smallmatrix}\right) = P\left(\begin{smallmatrix}\text{al più}\\ \text{1 nera}\end{smallmatrix}\right)$

ESERCIZIO 6

Un esame del sangue è in grado di diagnosticare una data malata nel 99% dei casi quando essa è in atto. L'esame, tuttavia, fornisce un falso positivo (esito positivo all'esame anche se la persona è sana) con probabilità 0.02. Dai dati storici è noto che l'0.5% della popolazione soffre di tale malattia. Calcolare la probabilità che una persona il cui test ha fornito esito positivo abbia effettivamente contratto la malattia:

$$\boxed{P(\text{malattia}) = 0.5\% = 0{,}005} \Rightarrow \boxed{P(\overline{\text{malattia}}) = 1 - P(\text{malattia}) = 0{,}995}$$

$$\boxed{P\left(\begin{smallmatrix}\text{esame}\\ \text{positivo}\end{smallmatrix} \middle| \text{malattia}\right) = 0{,}99} \Rightarrow \boxed{P\left(\begin{smallmatrix}\text{esame}\\ \text{positivo}\end{smallmatrix} \middle| \overline{\text{malattia}}\right) = 0{,}02}$$

$$P\left(\text{malattia} \middle| \begin{smallmatrix}\text{esame}\\ \text{positivo}\end{smallmatrix}\right) = \frac{P(\text{malattia} \cap \text{esame positivo})}{P(\text{esame positivo})} = \frac{P(\text{esame posit.} \mid \text{malattia})\, P(\text{malattia})}{P(\text{esame posit.} \mid \text{malattia})\, P(\text{malattia}) + P(\text{esame posit.} \mid \overline{\text{malattia}})\, P(\overline{\text{mal.}})} =$$

$$= \frac{0{,}99 \times 0{,}005}{0{,}99 \times 0{,}005 + 0{,}02 \times 0{,}995} = \frac{0{,}00495}{0{,}00495 + 0{,}0199} = 0{,}199$$

ESERCIZIO 7

Una compagnia di assicurazioni ritiene che le persone si possano suddividere in due classi: quelle a rischio (ovvero predisposte ad essere coinvolte in incidenti stradali) e quelle non a rischio. I dati indicano che, nel periodo di un anno, la probabilità che una persona a rischio avrà un incidente è pari a 0.1 mentre per gli altri tale probabilità vale 0.05. Dall'analisi dei dati storici la compagnia ritiene che chi sottoscrive una polizza sia un soggetto a rischio con probabilità 0.2.

Calcolare la probabilità che un nuovo aderente alla polizza abbia un incidente durante il primo anno:

$$\boxed{P(\text{soggetto rischio}) = 0{,}2} \Rightarrow \boxed{P(\overline{\text{soggetto rischio}}) = 0{,}8}$$

$$P(\text{incidente} \mid \text{soggetto rischio}) = 0{,}1 \qquad P(\text{incidente} \mid \overline{\text{soggetto rischio}}) = 0{,}05$$

$$P(\text{incidente}) = P\{(\text{incidente} \cap \text{soggetto rischio}) \cup (\text{incidente} \cap \overline{\text{soggetto rischio}})\} =$$

$$= P(\text{incidente} \cap \text{soggetto rischio}) + P(\text{incidente} \cap \overline{\text{soggetto rischio}}) =$$

$$= P(\text{incidente} \mid \text{soggetto rischio})\, P(\text{soggetto rischio}) + P(\text{incidente} \mid \overline{\text{soggetto rischio}})\, P(\overline{\text{soggetto rischio}}) =$$

$$= (0{,}1 \times 0{,}2) + (0{,}05 \times 0{,}8) = 0{,}06$$

Se un nuovo sottoscrittore ha un incidente durante il primo anno, qual è la probabilità che egli sia un soggetto a rischio?

$$P(\text{soggetto rischio} \mid \text{incidente}) = \frac{P(\text{soggetto rischio} \cap \text{incidente})}{P(\text{incidente})} =$$

$$= \frac{P(\text{incidente} \mid \text{soggetto rischio})\, P(\text{soggetto rischio})}{P(\text{incidente})} =$$

$$= \frac{0{,}1 \times 0{,}2}{0{,}06} = 0{,}33$$