ESERCIZIO 2.1

Sia *X* la variabile casuale che descrive il numero di teste ottenute nella prova lancio di tre monete truccate dove P(Croce)=3 x P(Testa).

1) Definirne la distribuzione di probabilità
2) Rappresentarla graficamente
3) Calcolarne valore atteso, varianza e asimmetria

SVOLGIMENTO

1)

Il lancio di tre monete può dare 2^3 risultati differenti indicati nella seguente tabella, dove T rappresenta l'evento si è presentato Testa e C rappresenta l'evento si è presentato Croce:

Moneta 1	**Moneta 2**	**Moneta 3**	**Numero di Testa**
C	C	C	0
T	C	C	1
C	T	C	1
C	C	T	1
T	T	C	2
T	C	T	2
C	T	T	2
T	T	T	3

Per calcolare le probabilità di Testa e Croce è possibile risolvere il seguente sistema di due equazioni in due incognite:

$$\begin{cases} P(C) = 3P(T) \\ P(C) + P(T) = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} P(C) = 3P(T) \\ P(T) = 1 - P(C) \end{cases} \qquad \begin{cases} P(C) = 3\left[1 - P(C)\right] = 3 - 3P(C) \\ P(T) = 1 - P(C) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4P(C) = 3 \Rightarrow P(C) = \dfrac{3}{4} \\ P(T) = 1 - P(C) \end{cases} \qquad \begin{cases} P(C) = \dfrac{3}{4} \\ P(T) = 1 - P(C) = \dfrac{1}{4} \end{cases}$$

Il calcolo delle probabilità associate agli eventi sfrutta l'indipendenza delle tre sottoprove componenti la prova di interesse.

$$P(C_1 \cap C_2 \cap C_3) = P(C_1) \times P(C_2) \times P(C_3) = \left(\frac{3}{4}\right)^3 = 0.422$$

$$P(T_1 \cap C_2 \cap C_3) = P(T_1) \times P(C_2) \times P(C_3) = \frac{1}{4} \times \left(\frac{3}{4}\right)^2 = 0.141$$

$$P(C_1 \cap T_2 \cap C_3) = P(C_1 \cap C_2 \cap T_3) = P(T_1 \cap C_2 \cap C_3) = 0.141$$

$$P(T_1 \cap T_2 \cap C_3) = P(T_1) \times P(T_2) \times P(C_3) = \left(\frac{1}{4}\right)^2 \times \frac{3}{4} = 0.047$$

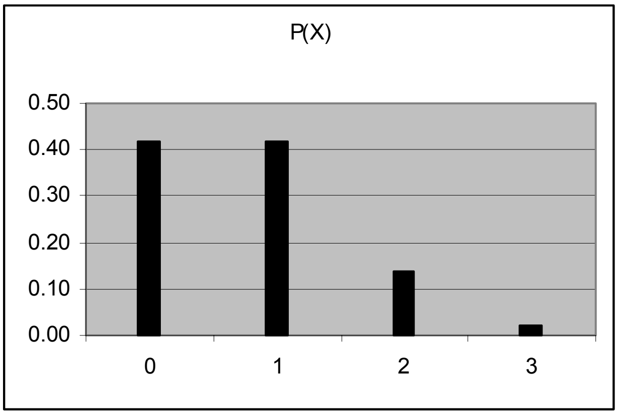
$$P(T_1 \cap C_2 \cap T_3) = P(C_1 \cap T_2 \cap T_3) = P(T_1 \cap T_2 \cap C_3) = 0.047$$

$$P(T_1 \cap T_2 \cap T_3) = P(T_1) \times P(T_2) \times P(T_3) = \left(\frac{1}{4}\right)^3 = 0.016$$

Tenendo conto che la probabilità di ottenere 1, 2 e 3 teste è pari all'unione delle probabilità di tre eventi elementari che danno vita ai rispettivi eventi composti si ha:

X (Numero di Testa)	P(X)
0	0.42
1	0.42 (0.141 x 3)
2	0.14 (0.047 x 3)
3	0.02

2)



3)

$$E(X) = \sum_i x_i p(x_i) = 0 \times 0.42 + 1 \times 0.42 + 2 \times 0.14 + 3 \times 0.02 = 0.76$$

$$\begin{aligned}
\sigma^2 &= E(X-\mu)^2 \\
&= \sum_i (x_i - \mu)^2 \, p(x_i) \\
&= (0-0.76)^2 \times 0.42 + (1-0.76)^2 \times 0.42 + (2-0.76)^2 \times 0.14 + (3-0.76)^2 \times 0.02 \\
&= 0.58
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{\bar{\mu}}_3 &= E\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)^3 \\
&= \frac{\sum_i (x_i - \mu)^3 \, p(x_i)}{\sigma^3} \\
&= \frac{(0-0.76)^3 \times 0.42 + (1-0.76)^3 \times 0.42 + (2-0.76)^3 \times 0.14 + (3-0.76)^3 \times 0.02}{0.76^3} \\
&= \frac{0.31}{0.44} = 0.70
\end{aligned}$$

ESERCIZIO 2.2

Si consideri l'esperimento lancio di un dado non truccato. Sia X la variabile casuale che assume valore pari alla faccia uscita; Y la variabile casuale che assume valore pari al doppio della faccia uscita e Z la variabile casuale 3 volte la faccia uscita meno tre unità.

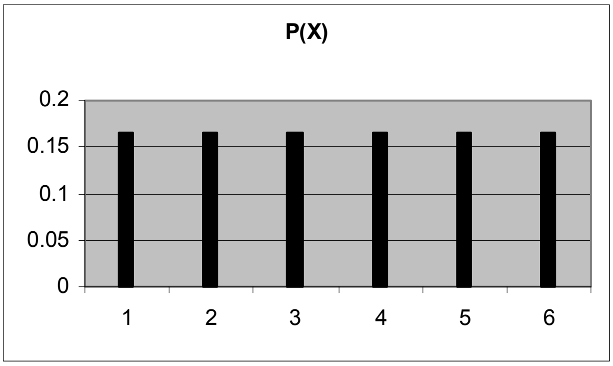
1) Specificare le distribuzioni di probabilità delle tre variabili e rappresentarle graficamente
2) Calcolare valore atteso e varianza usando le definizioni generali
3) Calcolare valore atteso e varianza usando quanto noto sulla distribuzione uniforme discreta

SVOLGIMENTO

1)

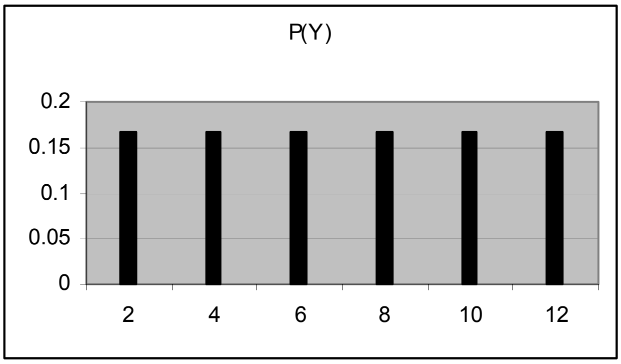
La variabile casuale X segue una distribuzione uniforme. La r rappresentate di seguito in forma tabellare e in forma grafica:

X	P(X)
1	1/6
2	1/6
3	1/6
4	1/6
5	1/6
6	1/6



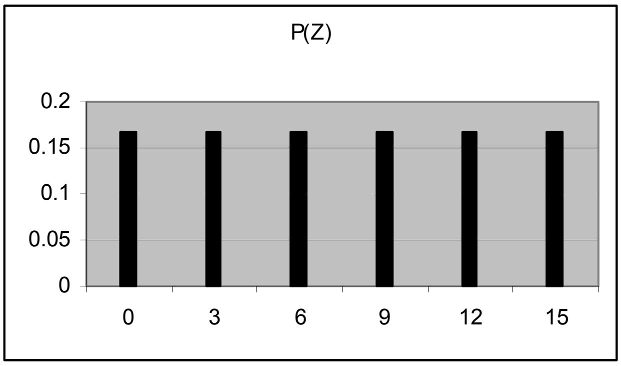
La distribuzione di probabilità della variabile Y=2X è:

Y	P(Y)
2	1/6
4	1/6
6	1/6
8	1/6
10	1/6
12	1/6



La distribuzione di probabilità della variabile Z=3X-3 è:

Z	P(Z)
0	1/6
3	1/6
6	1/6
9	1/6
12	1/6
15	1/6



2)
Calcolo del valore atteso per le tre variabili applicando la definizione:

$$E(X)=\sum_i x_i p(x_i)=1\times\frac{1}{6}+2\times\frac{1}{6}+...+5\times\frac{1}{6}+6\times\frac{1}{6}=3.5$$

$$E(Y)=\sum_i y_i p(y_i)=2\times\frac{1}{6}+4\times\frac{1}{6}+...+10\times\frac{1}{6}+12\times\frac{1}{6}=7$$

$$E(Z)=\sum_i z_i p(z_i)=0\times\frac{1}{6}+3\times\frac{1}{6}+...+12\times\frac{1}{6}+15\times\frac{1}{6}=7.5$$

Calcolo della varianza per le tre variabili applicando la definizione:

$$\begin{aligned}\sigma_X^2 &= E(X-\mu)^2\\ &= \sum_i (x_i-\mu)^2\, p(x_i)\\ &= (1-3.5)^2\times\frac{1}{6}+...+(6-3.5)^2\times\frac{1}{6}\\ &= 2.91667\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma_Y^2 &= E(Y-\mu)^2\\ &= \sum_i (y_i-\mu)^2\, p(y_i)\\ &= (2-7)^2\times\frac{1}{6}+...+(12-7)^2\times\frac{1}{6}\\ &= 11.667\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma_Z^2 &= E(Z-\mu)^2\\ &= \sum_i (z_i-\mu)^2\, p(z_i)\\ &= (0-7.5)^2\times\frac{1}{6}+...+(15-7.5)^2\times\frac{1}{6}\\ &= 26.25\end{aligned}$$

3)
La variabile casuale X è una variabile casuale uniforme. E' possibile calcolarne il valore atteso come di seguito indicato:

$E(X)=\frac{n+1}{2}=\frac{6+1}{2}=3.5$

Sfruttando la linearità dell'operatore valore atteso è facile ricavare di conseguenza il valore atteso delle altre due variabili:

$E(Y)=E(2X)=2E(X)=2\times 3.5=7$

$E(Z)=E(3X-3)=3E(X)-3=3\times 3.5-3=7.5$

Sfruttando quanto noto sulla varianza di una variabile casuale uniforme discreta si ha:

$\sigma_X=E(X-\mu)^2=\frac{n^2-1}{12}=\frac{6^2-1}{12}=2.91667$

Tenendo inoltre conto che se la variabile casuale W=aX+b è una combinazione lineare della variabile casuale X, si ha:

$$\sigma_w^2=\sigma_{ax+b}^2=a^2\sigma_x^2$$

è possibile calcolare la varianza per le altre due variabili casuali come segue:

$\sigma_Y^2=\sigma_{2x}^2=2^2\sigma_x^2=4\times 2.91667=11.6667$

$$\sigma_Z^2=\sigma_{3x-3}^2=3^2\sigma_x^2=9\times 291667=26.25$$

ESERCIZIO 2.3

Si consideri l'esperimento lancio di due dadi. Sia X1=X2 la variabile casuale risultato ottenuto rispettivamente sul primo e sul secondo lancio, Y la variabile casuale somma dei punteggi ottenuti $Y=X_1+X_2$ e $Z= X_1-X_2$ la variabile casuale differenza dei punteggi ottenuti.

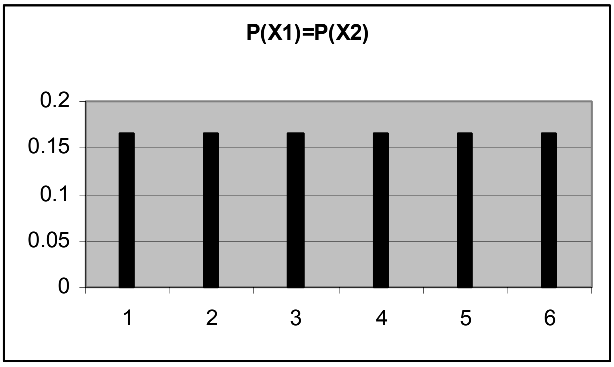
1) Specificare le distribuzioni di probabilità e rappresentarle graficamente
2) Calcolare il valore atteso delle quattro variabili
3) Calcolare la varianze delle quattro variabili

SVOLGIMENTO

1)

Le variabili X1 e X2 seguono una distribuzione uniforme. Sono rappresentate di seguito in forma tabellare e in forma grafica:

X1=X2	P(X1)=P(X2)
1	1/6
2	1/6
3	1/6
4	1/6
5	1/6
6	1/6

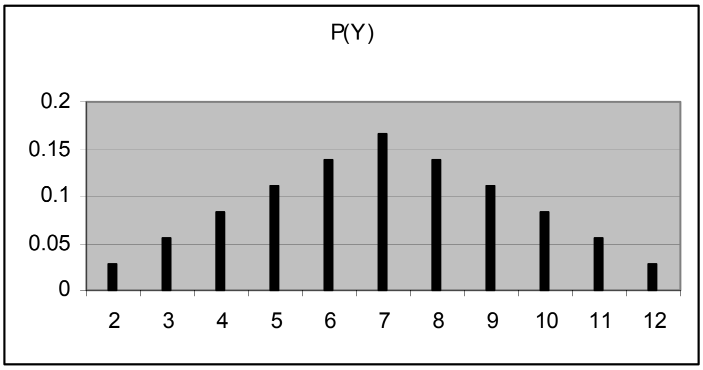


Per specificare la distribuzione di probabilità della variabile Y (somma dei punteggi ottenuti sui due dadi) è possibile considerare i 36 possibili risultati (ottenuti dal prodotto cartesiano dei risultati di ogni sottoprova, vale a dire del lancio di ciascun dado). La tabella seguente rappresenta i risultati possibili per il lancio del dado 1 sulle righe e quelli per il dado 2 sulle colonne, il corpo della tabella è ottenuto sommando i rispettivi risultati di riga e colonna:

		Dado 2					
		1	2	3	4	5	6
Dado 1	1	2	3	4	5	6	7
	2	3	4	5	6	7	8
	3	4	5	6	7	8	9
	4	5	6	7	8	9	10
	5	6	7	8	9	10	11
	6	7	8	9	10	11	12

Dalla tabella precedente si possono calcolare le frequenze dei valori che la variabile Y può assumere (da 2 a 12) e calcolarne le probabilità. La rappresentazione grafica della distribuzione di probabilità è ottenibile usando il diagramma ad aste.

Y	FREQ(Y)	P(Y)
2	1	1/36
3	2	1/18
4	3	1/12
5	4	1/9
6	5	5/36
7	6	1/6
8	5	5/36
9	4	1/9
10	3	1/12
11	2	1/18
12	1	1/36

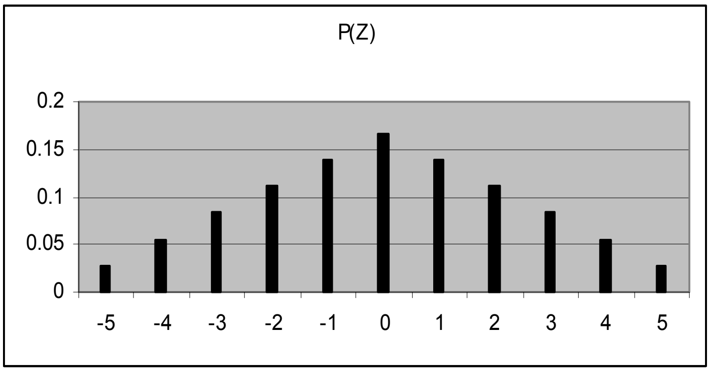


Un'analoga tabella può essere costruita per la variabile Z (differenza dei punteggi), calcolando le varie celle della stessa come differenza tra risultati di riga e risultati di colonna:

		Dado 2					
		1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
Dado 1	**1**	0	-1	-2	-3	-4	-5
	2	1	0	-1	-2	-3	-4
	3	2	1	0	-1	-2	-3
	4	3	2	1	0	-1	-2
	5	4	3	2	1	0	-1
	6	5	4	3	2	1	0

Da questa si possono calcolare le frequenze dei valori che la variabile può assumere (che vanno da −5 a + 5), le probabilità associate a ciascuno di tali valori e il diagramma ad aste per la rappresentazione grafica della distribuzione di probabilità.

Z	FREQ(Z)	P(Z)
-5	1	1/36
-4	2	1/18
-3	3	1/12
-2	4	1/9
-1	5	5/36
0	6	1/6
1	5	5/36
2	4	1/9
3	3	1/12
4	2	1/18
5	1	1/36



2)

Usando la definizione di valore atteso si ha:

$$E(X_1)=E(X_2)=\sum_i x_i p(x_i)=1\times\frac{1}{6}+2\times\frac{1}{6}+...+5\times\frac{1}{6}+6\times\frac{1}{6}=3.5$$

E' possibili sfruttare quanto noto sulla distribuzione uniforme per ottenere lo stesso risultato:

$$E(X_1)=E(X_2)=\frac{n+1}{2}=\frac{6+1}{2}=3.5$$

Analogamente, per la variabile Y, sfruttando la definizione di valore atteso si ha:

$$E(Y)=\sum_i y_i p(y_i)=2\times\frac{1}{36}+3\times\frac{1}{18}+...+11\times\frac{1}{18}+12\times\frac{1}{36}=7$$

Sfruttando la linearità dell'operatore media si poteva ottenere tale risultato più velocemente:

$$E(Y)=E(X_1+X_2)=7$$

La definizione di valore atteso per la variabile casuale Z da il seguente risultato:

$$E(Z)=\sum_i z_i p(z_i)=-5\times\frac{1}{36}+4\times\frac{1}{18}+...+4\times\frac{1}{18}+5\times\frac{1}{36}=0$$

Anche in questo caso la linearità dell'operatore permette di ottenere lo stesso risultato in maniera più veloce:

$$E(Z)=E(X_1-X_2)=0$$

3)
Calcolo della varianza per la variabile casuale X1 (e X2) sfruttando la definizione di varianza:

$$\begin{aligned}\sigma^2_{X_1}=\sigma^2_{X_2} &= E(X_1-\mu)^2\\ &= \sum_i (x_i-\mu)^2\, p(x_i)\\ &= (1-3.5)^2\times\frac{1}{6}+...+(6-3.5)^2\times\frac{1}{6}\\ &= 2.91667\end{aligned}$$

In maniera più veloce è possibile calcolare la varianza di X1 e X2 usando quanto noto sulla distribuzione uniforme:

$$\sigma^2_{X_1}=\sigma^2_{X_2}=\frac{n^2-1}{12}=2.91667$$

Calcolo della varianza per la variabile casuale Y=X1+X2

$$\begin{aligned}\sigma^2_Y &= E(Y-\mu)^2\\ &= \sum_i (y_i-\mu)^2\, p(y_i)\\ &= (2-7)^2\times\frac{1}{36}+(3-7)^2\times\frac{1}{18}+...+(11-7)^2\times\frac{1}{18}+(12-7)^2\times\frac{1}{36}\\ &= 5.83333\end{aligned}$$

Essendo le due variabili casuali indipendenti la varianza della variabile casuale somma delle due variabili può essere calcolata come somma delle varianze:

$$\sigma^2_Y=E(Y-\mu)^2=\sigma^2_{X_1}+\sigma^2_{X_2}=5.83333$$

Calcolo della varianza per la variabile casuale Z=X1-X2

$$\begin{aligned}
\sigma_z^2 &= E(Z-\mu)^2 \\
&= \sum_i (z_i-\mu)^2 p(z_i) \\
&= (-5-0)^2 \times \frac{1}{36} + (-4-0)^2 \times \frac{1}{18} + \dots + (4-0)^2 \times \frac{1}{18} + (5-0)^2 \times \frac{1}{36} \\
&= 5.83333
\end{aligned}$$

Essendo le due variabili casuali indipendenti la varianza della variabile casuale differenza delle due variabili può essere calcolata anche in questo caso come somma delle varianze:

$$\sigma_Z^2 = E(Z-\mu)^2 = \sigma_{X_1}^2 + \sigma_{X_2}^2 = 5.83333$$

ESERCIZIO 2.4

Una compagnia assicurativa ha presentato una nuova polizza assicurativa per la copertura di rischio di incidenti sul lavoro per la categoria di operai metalmeccanici. La polizza ha le seguenti caratteristiche: premio annuo da corrispondere 290 € e risarcimento in caso di incidente pari a 10'000 €.
L'analisi dei dati storici mostra che la probabilità di incidenti sul lavoro per tale categoria di lavoratori è pari a 0.02.
Qual è il guadagno atteso in termini monetari che la compagnia assicurativa si attende da un tale tipo di polizza?

SVOLGIMENTO

La distribuzione di probabilità può essere specificato come di seguito:

X	P(X)
290	0.98
-9710	0.02

L'assicurazione riceve infatti un premio pari a 290 e paga un premio pari a 10000 (da cui si deve detrarre il premio pagato).
Il guadagno atteso relativo alla polizza corrisponde al valore atteso della variabile casuale sopra riportato ed è pari a:

$$E(X) = \sum_i x_i p(x_i) = 290 \times 0.98 - 9710 \times 0.02 = 90$$