

ESERCIZIO 1.1

Nell'anno 2002 è stato osservato un campione di 300 fondi comuni di investimento della categoria azionaria europea, calcolando per essi i rendimenti e differenziandoli per la modalità di acquisto. I risultati di tale osservazione sono riportati nella seguente tabella:

		MODALITA' DI ACQUISTO		
		Banca (B)	Promotore (P)	
RENDIMENTO OTTENUTO	Negativo (RN)	62	48	110
	Positivo (RP)	108	82	190
		170	130	300

Calcolare la probabilità che un acquirente scelto a caso:

- 1) abbia acquistato un fondo presso una banca
- 2) abbia ottenuto un rendimento positivo
- 3) abbia acquistato un fondo da un promotore ottenendo un rendimento negativo
- 4) dal momento che ha acquistato un fondo presso una banca abbia ottenuto un rendimento positivo
- 5) dal momento che ha ottenuto un rendimento negativo abbia acquistato il fondo da un promotore
- 6) E' lecito ritenere che vi sia indipendenza tra la modalità di acquisto e il rendimento ottenuto?

SVOLGIMENTO

Per rispondere ai primi tre quesiti possiamo calcolare la tabella delle frequenze relative:

		MODALITA' DI ACQUISTO		
		Banca (B)	Promotore (P)	
RENDIMENTO OTTENUTO	Negativo (RN)	0.21	0.16	0.37
	Positivo (RP)	0.36	0.27	0.63
		0.57	0.43	1

1) $P(B) = 0.57$

2) $P(RP) = 0.63$

3) $P(RN \cap P) = 0.16$

4) $P(RP|B) = \frac{P(RP \cap B)}{P(B)} = \frac{0.36}{0.57}$

5) $P(P|RN) = \frac{P(P \cap RN)}{P(RN)} = \frac{0.16}{0.37}$

ESERCIZIO 1.2

Lo stabilimento di produzione di una data autovettura presenta un problema sulla linea di produzione. Si analizzano 120 pezzi prodotti prima di risolvere il problema: di essi 30 presentano un difetto al tergicristallo (difettosità tipo A), 40 presentano un difetto all'impianto di condizionamento (difettosità di tipo B) e 20 entrambi i difetti.

Analizzando un'autovettura a caso, si è interessati alla probabilità che questa presenti:

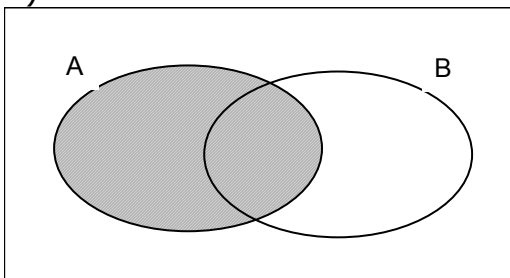
- 1) difettosità di tipo A
- 2) difettosità di tipo B
- 3) entrambi i difetti
- 4) almeno uno dei due difetti

Calcolare inoltre:

- 5) $P(\overline{A \cup B})$
- 6) $P(\overline{A \cap B})$
- 7) $P(\overline{A \cup B})$

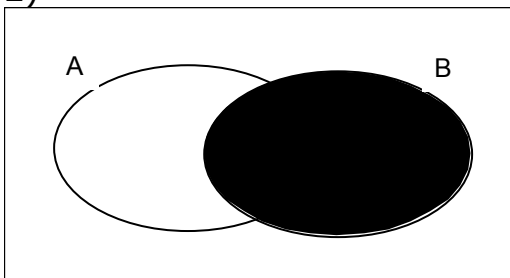
SVOLGIMENTO

1)



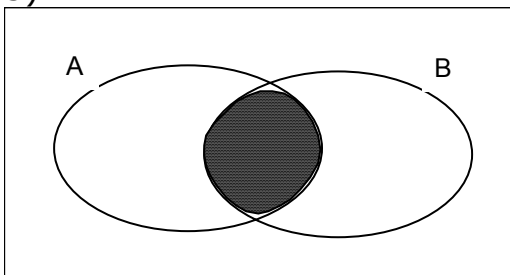
$$P(A) = \frac{30}{120} = \frac{1}{4}$$

2)



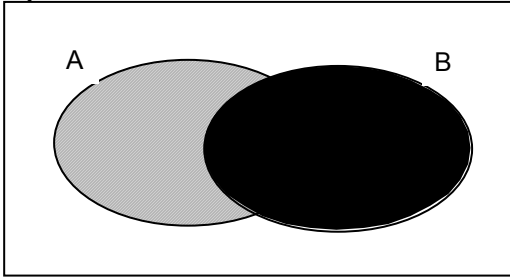
$$P(B) = \frac{40}{120} = \frac{1}{3}$$

3)



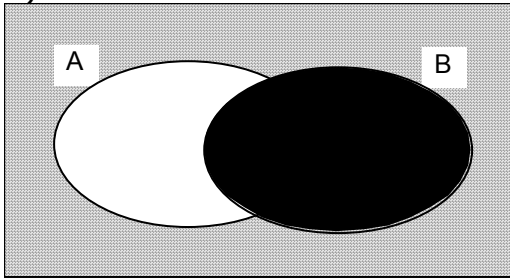
$$P(A \cap B) = \frac{20}{120} = \frac{1}{6}$$

4)



$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{30}{120} + \frac{40}{120} - \frac{20}{120} = \frac{5}{12}$$

5)



$$P(\bar{A} \cup B) = P(\bar{A}) + P(B) - P(\bar{A} \cap B)$$

L'evento B si può scrivere come:

$$B = (A \cap B) \cup (\bar{A} \cap B)$$

Essendo i due eventi incompatibili, si ha:

$$P(B) = P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B)$$

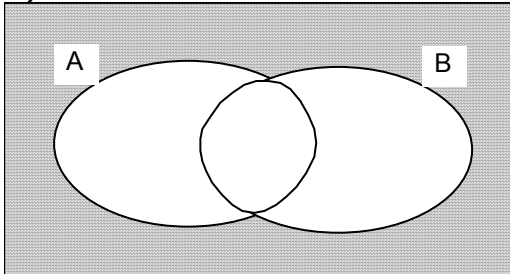
Da cui è possibile ricavare la probabilità di interesse:

$$P(\bar{A} \cap B) = P(B) - P(A \cap B)$$

Sostituendo questo risultato nella prima formula si ha:

$$\begin{aligned} P(\bar{A} \cup B) &= P(\bar{A}) + P(B) - P(\bar{A} \cap B) \\ &= P(\bar{A}) + P(B) - P(B) + P(A \cap B) \\ &= \frac{90}{120} + \frac{20}{120} = \frac{11}{12} \end{aligned}$$

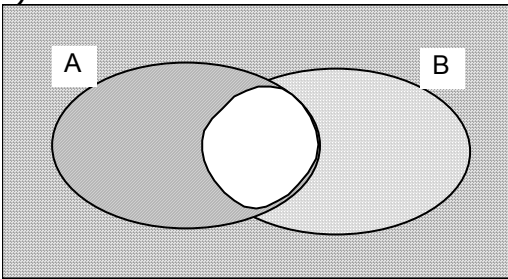
6)



$$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 1 - P(A \cup B)$$

che è stato calcolato al punto 4.

7)



$$\begin{aligned}P(\overline{A \cup B}) &= P(\overline{A}) + P(\overline{B}) - P(\overline{A} \cap \overline{B}) \\ &= 1 - P(A) + 1 - P(B) - P(\overline{A} \cap \overline{B})\end{aligned}$$

NOTA:

I quesiti 6 e 7 possono essere risolti sfruttando le leggi di De Morgan nel seguente modo:

6)

$$P(\overline{A \cap B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B)$$

7)

$$\begin{aligned}P(\overline{A \cup B}) &= P(\overline{A \cap B}) \\ &= 1 - P(A \cap B)\end{aligned}$$

ESERCIZIO 1.3

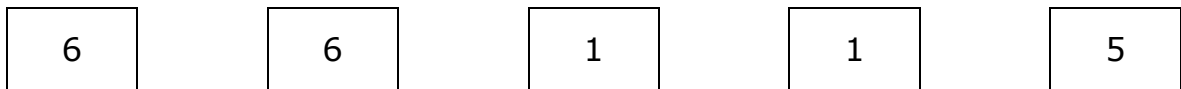
Due amici decidono di simulare una partita a poker usando 5 dadi. I punteggi sono elencati di seguito in ordine decrescente:

- 5 numeri uguali
- 4 numeri uguali
- 1 tris ed una coppia
- 1 tris
- 2 coppie
- 1 coppia

A parità di combinazione vince il giocatore che l'ha ottenuta con il numero maggiore.

Il primo giocatore lancia i dadi ed il secondo può scegliere quali mantenere e quali rilanciare.

In una particolare mano il primo giocatore ottiene:



Determinare quale strategia conviene adottare al secondo giocatore.

SVOLGIMENTO

Il giocatore può seguire tre strategie differenti: lanciare 1 solo dado, lanciare 2 dadi o lanciare 3 dadi (non conviene rilanciare i dadi con punteggio 6). Le tabelle seguenti riportano i risultati possibili per ciascuna strategia (si riporta 1 in caso di risultato favorevole al secondo giocatore e 0 altrimenti).

STRATEGIA 1: il giocatore 2 lancia 1 solo dado

Dadi non lanciati	Dado lanciato														
<div style="display: flex; justify-content: space-around; gap: 5px;"> <div style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px;">6</div> <div style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px;">6</div> <div style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px;">1</div> <div style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px;">1</div> </div>	<table style="margin: auto; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="padding: 5px 10px;">1</td> <td style="padding: 5px 10px;">2</td> <td style="padding: 5px 10px;">3</td> <td style="padding: 5px 10px;">4</td> <td style="padding: 5px 10px;">5</td> <td style="padding: 5px 10px;">6</td> <td style="border-left: 1px solid black; padding: 5px 10px;">6</td> </tr> <tr style="border-top: 1px solid black;"> <td style="padding: 5px 10px;">1</td> <td style="padding: 5px 10px;">0</td> <td style="padding: 5px 10px;">0</td> <td style="padding: 5px 10px;">0</td> <td style="padding: 5px 10px;">0</td> <td style="padding: 5px 10px;">1</td> <td style="border-left: 1px solid black; padding: 5px 10px;">2</td> </tr> </table>	1	2	3	4	5	6	6	1	0	0	0	0	1	2
1	2	3	4	5	6	6									
1	0	0	0	0	1	2									

$$P(\text{vittoria II giocatore}) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} = 0.33$$

Dadi non lanciati	Dado lanciato														
<div style="display: flex; justify-content: space-around; gap: 5px;"> <div style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px;">6</div> <div style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px;">6</div> <div style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px;">1</div> <div style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px;">5</div> </div>	<table style="margin: auto; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="padding: 5px 10px;">1</td> <td style="padding: 5px 10px;">2</td> <td style="padding: 5px 10px;">3</td> <td style="padding: 5px 10px;">4</td> <td style="padding: 5px 10px;">5</td> <td style="padding: 5px 10px;">6</td> <td style="border-left: 1px solid black; padding: 5px 10px;">6</td> </tr> <tr style="border-top: 1px solid black;"> <td style="padding: 5px 10px;">0</td> <td style="padding: 5px 10px;">0</td> <td style="padding: 5px 10px;">0</td> <td style="padding: 5px 10px;">0</td> <td style="padding: 5px 10px;">1</td> <td style="padding: 5px 10px;">1</td> <td style="border-left: 1px solid black; padding: 5px 10px;">2</td> </tr> </table>	1	2	3	4	5	6	6	0	0	0	0	1	1	2
1	2	3	4	5	6	6									
0	0	0	0	1	1	2									

$$P(\text{vittoria II giocatore}) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} = 0.33$$

STRATEGIA 2: il giocatore 2 lancia 2 dadi

Dadi non lanciati

6 **6** **1**

Dadi lanciati

	1	2	3	4	5	6	36
1	1	0	0	0	0	1	16
2	0	1	0	0	0	1	
3	0	0	1	0	0	1	
4	0	0	0	1	0	1	
5	0	0	0	0	1	1	
6	1	1	1	1	1	1	

$$P(\text{vittoria II giocatore}) = \frac{16}{36} = \frac{4}{9} = 0.44$$

Dadi non lanciati

6 **6** **5**

Dadi lanciati

	1	2	3	4	5	6	36
1	0	0	0	0	1	1	23
2	0	1	0	0	1	1	
3	0	0	1	0	1	1	
4	0	0	0	1	1	1	
5	1	1	1	1	1	1	
6	1	1	1	1	1	1	

$$P(\text{vittoria II giocatore}) = \frac{23}{36} = 0.64$$

STRATEGIA 3: il giocatore 2 lancia 3 dadi

Dadi non lanciati

6 **6**

Dadi lanciati

1

	1	2	3	4	5	6	36
1	1	0	0	0	0	1	16
2	0	1	0	0	0	1	
3	0	0	1	0	0	1	
4	0	0	0	1	0	1	
5	0	0	0	0	1	1	
6	1	1	1	1	1	1	

2

	1	2	3	4	5	6	36
1	0	1	0	0	0	1	23
2	1	1	1	1	1	1	
3	0	1	1	0	0	1	
4	0	1	0	1	0	1	
5	0	1	0	0	1	1	
6	1	1	1	1	1	1	

3

	1	2	3	4	5	6	36
1	0	0	1	0	0	1	23
2	0	1	1	0	0	1	
3	1	1	1	1	1	1	
4	0	0	1	1	0	1	
5	0	0	1	0	1	1	
6	1	1	1	1	1	1	

4

	1	2	3	4	5	6	36
1	0	0	0	1	0	1	23
2	0	1	0	1	0	1	
3	0	0	1	1	0	1	
4	1	1	1	1	1	1	
5	0	0	0	1	1	1	
6	1	1	1	1	1	1	

5

	1	2	3	4	5	6	36
1	0	0	0	0	1	1	23
2	0	1	0	0	1	1	
3	0	0	1	0	1	1	
4	0	0	0	1	1	1	
5	1	1	1	1	1	1	
6	1	1	1	1	1	1	

6

	1	2	3	4	5	6	36
1	1	1	1	1	1	1	36
2	1	1	1	1	1	1	
3	1	1	1	1	1	1	
4	1	1	1	1	1	1	
5	1	1	1	1	1	1	
6	1	1	1	1	1	1	

$$P(\text{vittoria II giocatore}) = \frac{16 + 23 \times 4 + 36}{36 \times 6} = \frac{144}{216} = 0.67$$

ESERCIZIO 1.4

Un'urna contiene otto palline di cui due bianche e sei rosse. Si estrae a caso una pallina: se questa è bianca la si reinserisce nell'urna aggiungendo un'altra pallina di colore rosso; se è rossa non la si reinserisce.

Calcolare la probabilità che estraendo una seconda pallina questa sia rossa.

SVOLGIMENTO

Si indichi con R_1 e R_2 il presentarsi di una pallina rossa rispettivamente alla prima estrazione e alla seconda estrazione e con B_1 e B_2 gli eventi analoghi per la pallina bianca. La probabilità di interesse può essere calcolata come segue:

$$\begin{aligned} P(R_2) &= P(R_1 \cap R_2) + P(B_1 \cap R_2) \\ &= P(R_1)P(R_2 | R_1) + P(B_1)P(R_2 | B_1) \\ &= \frac{6}{8} \times \frac{5}{7} + \frac{2}{8} \times \frac{7}{9} \end{aligned}$$