Università degli Studi di Cassino, Anno accademico 2004-2005
Corso di Statistica 2, Prof. M. Furno

Esercitazione del 15/03/2005
dott. Claudio Conversano

Esercizio 1
Si riportano i rendimenti mensili dei titoli azionari X ed Y nel periodo maggio 2004-febbraio 2005..

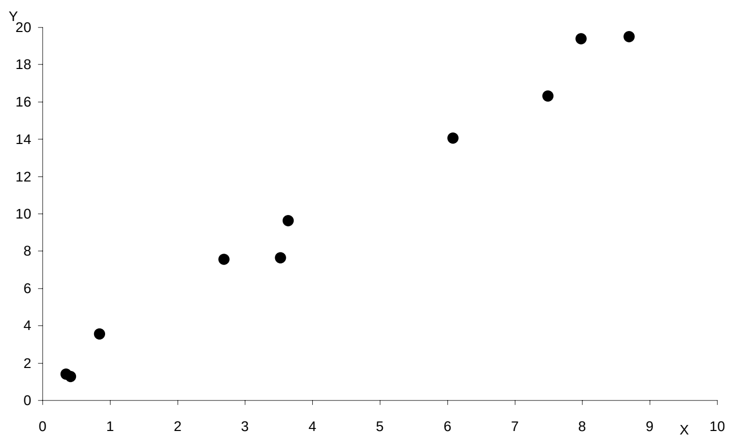
Data	x	y
Mag. 04	0,41	1,26
Giu. 04	7,98	19,40
Lug. 04	6,08	14,05
Ago. 04	3,64	9,63
Sett. 04	0,35	1,41
Ott. 04	8,69	19,50
Nov. 04	7,49	16,31
Dic. 04	2,69	7,57
Gen. 05	3,53	7,63
Feb.05	0,84	3,55

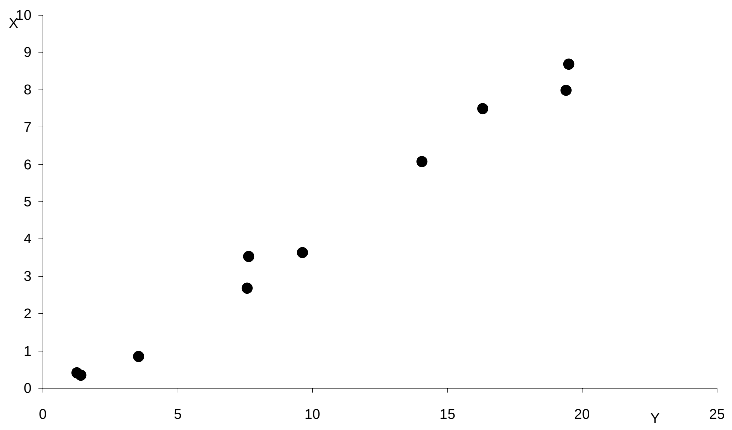
Ipotizzando che tra le due variabili esiste una relazione di tipo lineare determinare i parametri delle rette di regressione di:

a) Y dato X
b) X dato Y
c) Misurare la correlazione tra i due caratteri osservati
d) Calcolare lo stimatore della varianza della funzione di regressione
e) Calcolare la varianza degli stimatori dei parametri α e β.

SVOLGIMENTO

Disegniamo i diagrammi di dispersione:





Per determinare i parametri delle due rette di regressione costruiamo la seguente tabella:

x_i	y_i	$x_i y_i$	x_i^2	y_i^2
0.41	1.26	0.5166	0.1681	1.5876
7.98	19.4	154.812	63.6804	376.36
6.08	14.05	85.424	36.9664	197.4025
3.64	9.63	35.0532	13.2496	92.7369
0.35	1.41	0.4935	0.1225	1.9881
8.69	19.5	169.455	75.5161	380.25
7.49	16.31	122.1619	56.1001	266.0161
2.69	7.57	20.3633	7.2361	57.3049
3.53	7.63	26.9339	12.4609	58.2169
0.84	3.55	2.982	0.7056	12.6025
41.7	**100.31**	**618.1954**	**266.2058**	**1444.466**

Calcoliamo le medie delle due variabili:

$$E(X) = \frac{41.7}{10} = 4.17 \qquad E(\mathrm{Y}) = \frac{100.31}{10} = 10.03$$

Determiniamo i parametri della retta di regressione di *Y rispetto ad X*:

$$\hat{y} = \alpha + \beta x$$

$$\hat{\beta} = \frac{Cov(X,Y)}{Var(X)} = \frac{\frac{618.19}{10} - (4.17 \cdot 10.03)}{\frac{266.21}{10} - (4.17)^2} = 2.17$$

$$\hat{\alpha} = E(Y) - \hat{\beta}_1 E(X) = 10.03 - 2.17(4.17) = 1.00$$

Determiniamo i parametri della retta di regressione di *X rispetto ad Y*:

$$\hat{x} = \hat{\alpha}_0^* + \hat{\beta}^* \hat{y}$$

$$\hat{\beta}_1^* = \frac{Cov(X,Y)}{Var(Y)} = \frac{19.99}{\frac{1444.17}{10} - (10.03)^2} = 0.46$$

$$\hat{\beta}_0^* = E(X) - \hat{\beta}^* E(Y) = 4.17 - 0.46(10.03) = -0.44$$

Calcoliamo il coefficiente di correlazione:

$$Corr(X,Y) = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X)Var(Y)}} = \frac{19.99}{\sqrt{9.2.3 \times 43.82}} = 0.994$$

Calcoliamo lo stimatore della varianza della funzione di regressione. Per prima cosa bisogna calcolare la somma dei quadrati dei residui.

y_i	$\hat{y}_i$	$e_i = y_i - \hat{y}_i$	$e_i^2 = (y_i - \hat{y}_i)^2$
1.26	1.8891	-0.629	0.396
19.4	18.2812	1.119	1.252
14.05	14.1669	-0.117	0.014
9.63	8.88334	0.747	0.558
1.41	1.75918	-0.349	0.122
19.5	19.8186	-0.319	0.102
16.31	17.2201	-0.910	0.828
7.57	6.82621	0.744	0.553
7.63	8.64514	-1.015	1.031
3.55	2.82022	0.730	0.533
			5.387

La stima della varianza della funzione di regressione è pari al rapporto tra la somma dei quadrati dei residui ed *n-2*.

$$S_{(e)}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} e_i^2}{n-2} = \frac{5.837}{8} = 0.73$$

Calcoliamo la varianza degli stimatori di α e β.

$$Var(\hat{\beta}) = S_{(e)}^2 \frac{1}{nVar(X)} = 0.73 \cdot \frac{1}{10 \cdot 9.23} = 0.008$$

$$Var(\hat{\alpha}) = S_{(e)}^2 E\left(X^2\right) \frac{1}{nVar(X)} = 0.008 \frac{266.21}{10} \cdot \frac{1}{10 \cdot 9.23} = 0.0022$$

Esercizio 2
Alcuni dati relativi ad un campione di 40 unità hanno fornito i seguenti valori relativi a due caratteri osservati (X ed Y):

$$E(X)=150; \; E(Y)=40; \quad Var(X)=81; \; Var(Y)=25; \; Corr(X,Y)=0.95.$$

a) Determinare i parametri delle rette di regressione $Y=\alpha+\beta X$ e $X=\alpha'+\beta' Y$.
b) Stimare il valore di Y per X=120.

SVOLGIMENTO

$$\beta_1 = Corr(X,Y)^2 \frac{Var(Y)}{Var(X)} = 0.95^2 \frac{25}{81} = 0.528$$

$$\alpha = E(Y) - \beta E(X) = 40 - (0.528 \cdot 150) = -39.2$$

L'equazione della retta di regressione $Y=\alpha+\beta X$ è: $Y=-39.2+0.528X$

$$\beta' = Corr(X,Y)^2 \frac{Var(X)}{Var(Y)} = 0.95^2 \frac{81}{25} = 2.924$$

$$\alpha' = E(X) - \beta' E(Y) = 150 - (2.924 \cdot 40) = 33.036$$

L'equazione della retta di regressione $X=\alpha'+\beta' Y$ è: $Y=33.036+2.924 \cdot Y$

Se X=120 si ha:

$$Y=-39.2+0.528 \cdot 120 = 24.16$$