Università degli Studi di Cassino, Anno accademico 2004-2005
Corso di Statistica 2, Prof. M. Furno

Esercitazione del 01/03/2005
dott. Claudio Conversano

Esercizio 1
Un responsabile del controllo di qualità per un impianto di realizzazione di pomodori in scatola sa che la quantità di pomodoro contenuta nei singoli barattoli può variare, a causa di fattori incontrollabili del processo produttivo. La quantità media contenuta è importante, ma altrettanto importante può essere la sua variabilità. Se σ^2 è troppo grande, alcuni barattoli conterranno troppo pomodoro ed altri troppo poco. Per valutare tale variabilità, vengono selezionati e pesati accuratamente 10 barattoli, ricavando: $\bar{x} = 798gr.$ e $s = 0.04gr.$
Ipotizzando che il contenuto di pomodori in ogni scatola segua una distribuzione normale, costruire un intervallo di confidenza al 90% per la varianza del processo di riempimento.

SVOLGIMENTO

Si richiede di costruire l'intervallo di confidenza per la varianza avendo osservato un carattere X la cui distribuzione è normale e di cui non è nota la media.
Per costruire l'intervallo di confidenza per σ^2 bisogna considerare la statistica $(n-1)S^2/\sigma^2$, che ha una distribuzione chi-quadro *n-1* gradi di libertà.
E' possibile costruire un intervallo simmetrico intorno a σ^2 individuando due valori $\chi^2_{(\alpha/2);n-1}$ e $\chi^2_{(1-\alpha/2);n-1}$ tali che $P\left(\chi^2_{(\alpha/2);n-1} \leq (n-1)S^2/\sigma^2 \leq \chi^2_{(1-\alpha/2);n-1}\right) = 1-\alpha$. Tale relazione equivale a:

$$P\left(\chi^2_{(\alpha/2);n-1} \leq \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \leq \chi^2_{(1-\alpha/2);n-1}\right) = P\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{(\alpha/2);n-1}} \leq \sigma^2 \leq \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{(1-\alpha/2);n-1}}\right) = 1-\alpha$$

Dai dati a disposizione risulta:

$$n-1 = 10-1 = 9; \qquad \bar{x} = 798; \qquad s = 0.04$$

Poichè $1 - \alpha = 0.90$ si avrà $\alpha/2 = 0.05$, $\chi^2_{(0.05);9} = 16.919$ e $\chi^2_{(0.95);9} = 3.325$. La probabilità di cui sopra può essere riscritta nel seguente modo:

$$P\left(16.919 \leq \frac{9 \cdot 0.04^2}{\sigma^2} \leq 3.325\right) = 0.90$$

L'intervallo di confidenza per σ^2 al 90% risulta pari a:

$$\left[\frac{9 \cdot 0.04^2}{16.919}, \frac{9 \cdot 0.04^2}{3.325}\right] = [0.000851, 0.004331]$$

Esercizio 2
Da un'indagine sull'efficienza del sistema di trasporto aereo in Italia, è risultato che per un campione casuale di 20 voli in partenza da Fiumicino in alta stagione lo scarto quadratico medio campionario (corretto) dell'orario di partenza di un volo di linea è uguale a 3.5 minuti primi. La stessa grandezza calcolata per un campione casuale di 129 voli effettuati durante tutto l'arco di una giornata è uguale a 5 minuti primi.
Supponendo che la variabile "orario di partenza" sia distribuita come una v.c. Normale e che le osservazioni siano indipendenti, determinare gli intervalli di confidenza al 95 % per la varianza dell'orario di percorrenza sulla base di ciascuno dei due campioni osservati.

SVOLGIMENTO

Si richiede di costruire l'intervallo di confidenza per la varianza avendo osservato un carattere X la cui distribuzione è normale e di cui non è nota la media. In questo caso si è interessati a costruire tale intervallo di confidenza facendo variare la dimensione del campione, supponendo di aver osservato un campione di *n=20* voli ed un altro campione di *n=129*.
Consideriamo separatamente i 2 casi:

Caso a) ***n=20***

Per costruire l'intervallo di confidenza per σ^2 bisogna considerare la statistica $(n-1)S^2/\sigma^2$, che ha una distribuzione chi-quadro *n-1* gradi di libertà.
E' possibile costruire un intervallo simmetrico intorno a σ^2 individuando due valori $\chi^2_{(\alpha/2);n-1}$ e $\chi^2_{(1-\alpha/2);n-1}$ tali che $P\left(\chi^2_{(\alpha/2);n-1} \le (n-1)S^2/\sigma^2 \le \chi^2_{(1-\alpha/2);n-1}\right) = 1-\alpha$. Tale relazione equivale a:

$$P\left(\chi^2_{(\alpha/2);n-1} \le \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \le \chi^2_{(1-\alpha/2);n-1}\right) = P\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{(\alpha/2);n-1}} \le \sigma^2 \le \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{(1-\alpha/2);n-1}}\right) = 1-\alpha$$

Dai dati a disposizione risulta:

$$n-1 = 20-1 = 19; \qquad \tilde{s} = 3.5; \qquad \tilde{s}^2 = 3.5^2 = 12.25; \qquad s^2 = \tilde{s}^2\frac{n-1}{n} = 12.25\cdot\frac{19}{20} = 11.6375$$

Poichè 1 − α = 0.95 si avrà $\alpha/2 = 0.025$, $\chi^2_{(0.025);19} = 32.852$ e $\chi^2_{(0.975);19} = 8.907$. La probabilità di cui sopra può essere riscritta nel seguente modo:

$$P\left(32.852 \le \frac{19\cdot 11.6375}{\sigma^2} \le 8.907\right) = 0.95$$

L'intervallo di confidenza per σ^2 al 95% risulta pari a:

$$\left[\frac{19\cdot 11.6375}{32.852}, \frac{19\cdot 11.6375}{8.907}\right] = [6.73, 24.82].$$

Caso b) ***n=129***

E' noto che quando la numerosità campionaria è maggiore di 100 la v.c. χ^2_{n-1} risulta distribuita come una v.c. Normale avente media uguale a *(n-1)* e varianza uguale a *2(n-1)*, cioè:

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \approx N\left((n-1);2(n-1)\right) \Rightarrow Z = \frac{\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}-(n-1)}{\sqrt{2(n-1)}} \approx N(0,1)$$

E' possibile costruire un intervallo simmetrico intorno a Z individuando due valori $-z_{\alpha/2}$ e $+z_{\alpha/2}$ tali che $P\left(-z_{\alpha/2} \le Z \le +z_{\alpha/2}\right) = 1-\alpha$. Tale relazione equivale a:

$$P\left(-z_{\alpha/2} \le Z \le +z_{\alpha/2}\right) = P\left(-z_{\alpha/2} \le \frac{\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}-(n-1)}{\sqrt{2(n-1)}} \le +z_{\alpha/2}\right) =$$

$$= P\left(\frac{(n-1)S^2}{(n-1)+z_{\alpha/2}\sqrt{2(n-1)}} \le \sigma^2 \le \frac{(n-1)S^2}{(n-1)-z_{\alpha/2}\sqrt{2(n-1)}}\right) = 1-\alpha$$

Dai dati a disposizione risulta:

$$n = 129; \qquad \tilde{s} = 5; \;\; \tilde{s}^2 = 5^2 = 25; \;\; s^2 = \tilde{s}^2\frac{n-1}{n} = 25\cdot\frac{128}{129} = 24.806$$

Poiché 1 − α = 0.95 si avrà $\alpha/2 = 0.025$, e $\left|z_{\alpha/2}\right| = 1.96$. La probabilità di cui sopra può essere riscritta nel seguente modo:

$$P(-1.96 \le Z \le +1.96) = P\left(-1.96 \le \frac{\frac{(128)24.806}{\sigma^2}-(128)}{\sqrt{2(128)}} \le +1.96\right) = 0.95$$

L'intervallo di confidenza per σ^2 al 95% risulta pari a:

$$\left[\frac{(128)24.806}{(128)+1.96\sqrt{2(128)}}, \frac{(128)24.806}{(128)-1.96\sqrt{2(128)}}\right] = [19.92, 32.86].$$