Università degli Studi di Cassino, Anno accademico 2004-2005
Corso di Statistica 2, Prof. M. Furno

Esercitazione del 22/02/2005
dott. Claudio Conversano

Esercizio 1
Sia *X* il prezzo di un kg. di arance praticato dai rivenditori dei mercati ortofrutticoli del Lazio. Supponendo che *X* abbia una distribuzione normale con media 0.9 Euro e varianza 0.09 si determini la probabilità che il prezzo medio di un kg. di arance in un campione di 25 rivenditori sia superiore a 1.01 Euro.

SVOLGIMENTO

Anche in questo caso non è possibile costruire l'universo di tutti i possibili campioni di ordine 25. Si può ritenere che la distribuzione del prezzo di un kg. di arance….., segua una distribuzione normale con media 0.9 Euro e varianza 0.09. Sotto questa ipotesi la media campionaria ha anch'essa una distribuzione normale con media μ e varianza σ^2/n.

La probabilità richiesta sarà quindi data da:

$$P\left(\bar{X} \leq 1.01\right) = P\left(\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \geq 1.01\right) = P\left(Z \geq \frac{1.01-0.9}{(0.3)/5}\right) = 1-0.96638 = 0.03362$$

Esercizio 2

Sia P una popolazione composta da N unità statistiche e sia X una variabile quantitativa presente sulla popolazione considerata, avente media uguale a μ e varianza uguale a σ^2.

Si supponga di voler determinare l'ammontare totale di X distribuito sull'intera popolazione P a partire da un campione casuale $X_n = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ di numerosità n.

Verificare se lo stimatore $T_n = N\overline{X}_n$ consistente per l'ammontare totale di X.

SVOLGIMENTO

Indichiamo con θ l'ammontare totale di X su P, cioè: $\theta = \sum_{i=1}^{n} X_i = N\mu$, e calcoliamo l'Errore Quadratico Medio di T_n:

$E(T_n) = E(N\overline{X}_n) = NE(\overline{X}_n) = N\mu = \theta$ $\Rightarrow$ lo stimatore T_n è non distorto;

$$EQM(T_n) = Var(T_n) + [b(T_n)]^2 = Var(N\overline{X}_n) + 0 = N^2 Var(\overline{X}_n) = N^2 \frac{\sigma^2}{n}.$$

Pertanto:

$\lim_{n\to\infty} EQM(T_n) = \lim_{n\to\infty} N^2 \frac{\sigma^2}{n} = 0$ $\Rightarrow$ lo stimatore considerato risulta consistente in media quadratica (e quindi anche in probabilità) per il parametro θ.

Esercizio 3
Sia *P* una popolazione di unità statistiche di numerosità nota uguale a *N*. Sia *X* una variabile dicotomica osservabile sulla popolazione in esame, per la quale si verifica che la frequenza del valore *X=1* risulta uguale a *K*. Supponiamo di voler determinare il valore di *K* a partire da un campione casuale $X_n = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ di numerosità *n*. Verificare se lo stimatore $T_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ è non distorto e consistente.

SVOLGIMENTO

Affinché lo stimatore $T_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ risulti non distortoli suo valore atteso deve essere uguale a *K*.

$$E(T_n) = E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i) = n\theta = \frac{n}{N}K$$

$\Rightarrow$ lo stimatore $T_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ è distorto.

La distorsione è data da: $b(T_n) = \frac{n}{N}K - K = K\left(\frac{n}{N} - 1\right)$

Per verificare la consistenza di T_n è necessario calcolare l'Errore Quadratico Medio di T_n. La varianza è data da:

$$Var(T_n) = Var\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} Var(X_i) = nVar(X_i) = n\theta(1-\theta) = n\frac{K}{N}\left(1 - \frac{K}{N}\right)$$

$$EQM(T_n) = Var(T_n) + b^2(T_n) = n\frac{K}{N}\left(1 - \frac{K}{N}\right) + K^2\left(\frac{n}{N} - 1\right)^2$$

$$\lim_{n\to\infty} EQM(T_n) = \lim_{n\to\infty}\left[n\frac{K}{N}\left(1 - \frac{K}{N}\right) + K^2\left(\frac{n}{N} - 1\right)^2\right] = \infty$$

Di conseguenza lo stimatore T_n non è consistente in media quadratica.