Università degli Studi di Cassino, Anno accademico 2004-2005
Corso di Statistica 2, Prof. M. Furno

Esercitazione del 15/02/2005
dott. Claudio Conversano

Esercizio 1
Un agente di vendita mediamente conclude una vendita ogni 8 clienti contattati. Calcolare la probabilità che su 100 clienti si concludano tra 6 e 8 vendite.

SVOLGIMENTO

Si tratta di un evento dicotomico (ogni contatto può concludersi con una vendita o con una "non vendita". Ad ogni contatto corrisponde un v.c. di Bernoulli in cui il "successo" è rappresentato dalla vendita che avviene con probabilità $p = 1/8$. Poiché si contattano 100 clienti, il numero totale di vendite è una v.c. Binomiale di parametri $n=100$ e $p = 1/8$. Bisogna calcolare $P(6 \leq X \leq 10)$.

Poiché n è elevato è possibile utilizzare l'approssimazione della v.c. Binomiale alla v.c. Normale che si ottiene attraverso la trasformazione:

$$Z \approx \frac{X - np}{\sqrt{np(1-p)}}$$

Quindi:

$$P(6 \leq X \leq 10) = P\left(\frac{6 - 100 \cdot 1/8}{\sqrt{100 \cdot 1/8(1-1/8)}} \leq \frac{X - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leq \frac{10 - 100 \cdot 1/8}{\sqrt{100 \cdot 1/8(1-1/8)}}\right) =$$
$$= P\left(\frac{6-12.5}{\sqrt{3.307}} \leq Z \leq \frac{10-12.5}{\sqrt{3.307}}\right) = P(-1.97 \leq Z \leq -0.76) = P(0.76 \leq Z \leq 1.97) =$$
$$= \Phi(1.97) - \Phi(0.76) = 0.19921$$

Esercizio 2

Sia X variabile casuale χ^2 con *r* gradi di libertà. Si determinino le seguenti probabilità:

a) $P(X \leq 6.304)$ per *r = 12.*
b) $P(1.61 \leq X \leq 11.07)$ per *r = 5.*
c) $P(9.260 \leq X \leq 35.172)$ per *r = 23.*

SVOLGIMENTO

Utilizzando la tavola della distribuzione χ^2 si ha:

a) per *r = 12.* $P(X \leq 6.304) = 1 - P(X > 6.304) = 1 - 0.9 = 0.1.$
b) per *r = 5.* $P(1.61 \leq X \leq 11.07) = P(X \geq 1.61) - P(X > 11.07) = 0.90 - 0.05 = 0.85$
c) per *r = 23.*
$P(9.260 \leq X \leq 35.172) = P(X \geq 9.260) - P(X > 35.172) = 0.995 - 0.05 = 0.945$

Esercizio 3
Sia X una variabile casuale che ha una distribuzione t di Student con r gradi di libertà. Supponendo che sia:

a) $r=10$, si determinino le probabilità $P(X \geq 2.228)$, $P(X \leq 2.228)$, $P(|X| \geq 2.228)$;

b) $r=15$, si determini la probabilità $P(-1.753 \leq X \leq 2.602)$;

c) $r=18$, si determini la probabilità $P(1.330 \leq X \leq 2.552)$;

d) $r=10$, si determini il valore c_1 per il quale risulta $P(|X| \geq c_1) = 0.1$

SVOLGIMENTO

Utilizzando la tavola della t di Student si ha:

a) $r=10$:
$P(X \geq 2.228) = 0.025$,
$P(X \leq 2.228) = 1 - P(X \geq 2.228) = 1 - 0.025 = 0.975$,
$P(|X| \geq 2.228) = P(X \geq 2.228) + P(X \leq 2.228) = 2P(X \geq 2.228) = 0.05$.

b) $r=15$:
$P(-1.753 \leq X \leq 2.602) =$
$= P(X \geq -1.753) - P(X \geq 2.602) =$
$= 1 - P(X \geq 1.753) - P(X \geq 2.602) = 1 - 0.05 - 0.01 = 0.94$

c) $r=18$:
$P(1.330 \leq X \leq 2.552) = P(X \geq 1.330) - P(X \geq 2.552) =$
$= 0.10 - 0.01 = 0.09$

d) Per determinare il valore c_1, dalla relazione $P(|X| \geq c_1) = 1 - P(-c_1 \leq X \leq c_1) = 0.1$ si ricava $P(-c_1 \leq X \leq c_1) = 0.9$, ovvero $P(X \leq c_1) = 0.95$ e quindi $P(X \geq c_1) = 0.05$. Per $r=10$ risulta $c_1 = 1.812$

Esercizio 4
Sia *X* una variabile casuale che ha una distribuzione *F* con r_1 ed r_2 gradi di libertà. Si calcolino le seguenti probabilità:

a) $P(X \geq 3.02)$ per $r_1=9$ ed $r_2=10$;
b) $P(X \leq 4.14)$ per $r_1=7$ ed $r_2=15$;
c) $P(X \leq 0.1508)$ per $r_1=8$ ed $r_2=5$.

SVOLGIMENTO

a) $P(X \geq 3.02) = 0.05$;
b) $P(X \leq 4.14) = 1 - P(X > 4.14) = 0.99$;
c) Nella tavola della distribuzione *F* non figura il valore $x_\alpha = 0.1508$. Si può tuttavia rispondere al quesito ricordando che, se si hanno due v.c. indipendenti $Y \approx \chi^2(r_1)$ e $Z \approx \chi^2(r_2)$, il rapporto:

$$X = \frac{Y/r_1}{Z/r_2} \approx F(r_1, r_2)$$

Ne consegue immediatamente che $(1/X) \approx F(r_2, r_1)$. Pertanto, risultando:

$$P(X \leq 0.1508) = P\left(X \leq \frac{1}{6.63}\right) = P\left[(1/X) \geq 6.63\right]$$

ed essendo $(1/X) \approx F(r_1 = 5, r_2 = 8)$ dalla tavola della distribuzione *F* si desume che $P\left[(1/X) \geq 6.63\right] = 0.01$.

Esercizio 5

Si consideri una popolazione di 4 studenti che, nella sessione d'esame del mese di dicembre 2004 hanno sostenuto rispettivamente 1, 1, 3, 5 esami.

a) Si costruisca la distribuzione campionaria del numero mediano di esami sostenuti per campioni di ordine 2 estratti con ripetizione e si calcoli il valore atteso e la varianza.
b) Si costruisca la distribuzione campionaria del numero mediano di esami sostenuti per campioni di ordine 2 estratti senza ripetizione e si calcoli il valore atteso e la varianza.

SVOLGIMENTO

a) Si costruisca la distribuzione campionaria del numero mediano di esami sostenuti per campioni di ordine 2 estratti con ripetizione e si calcoli il valore atteso e la varianza.

Effettuando un'estrazione con ripetizione di due unità, l'universo dei campioni è costituito da $N^n = 4^2 = 16$ elementi. Essi sono:

$$\begin{array}{cccc} U_1U_1 & U_1U_2 & U_1U_3 & U_1U_4 \\ U_2U_1 & U_2U_2 & U_2U_3 & U_2U_4 \\ U_3U_1 & U_3U_2 & U_3U_3 & U_3U_4 \\ U_4U_1 & U_4U_2 & U_4U_3 & U_4U_4 \end{array}$$

Il corrispondente universo dei campioni di determinazioni del carattere X (numero di esami sostenuti nella sessione…..) risulta:

$$\begin{array}{cccc} (1,1) & (1,1) & (1,3) & (1,5) \\ (1,1) & (1,1) & (1,3) & (1,5) \\ (3,1) & (3,1) & (3,3) & (3,5) \\ (5,1) & (5,1) & (5,3) & (5,5) \end{array}$$

Poiché ciascuna unità ha la stessa probabilità di essere estratta, ogni campione ha probabilità pari a 1/16 di presentarsi. Le mediane dei 16 campioni sono:

$$\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 3 & 4 & 5 \end{array}$$

La distribuzione campionaria della mediana risulta:

$$\begin{array}{cccccc} \bar{X}_{Me}: & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ f\left(\bar{X}_{Me}\right): & 4/16 & 4/16 & 5/16 & 2/16 & 1/16 \end{array}$$

$$E\left(\bar{X}_{Me}\right) = 1 \cdot 4/16 + 2 \cdot 4/16 + 3 \cdot 5/16 + 4 \cdot 2/16 + 5 \cdot 1/16 = 2.5$$

$$Var\left(\bar{X}_{Me}\right) = 1^2 \cdot 4/16 + 2^2 \cdot 4/16 + 3^2 \cdot 5/16 + 4^2 \cdot 2/16 + 5^2 \cdot 1/16 - 2.5^2 = 1.375$$

b) Si costruisca la distribuzione campionaria del numero mediano di esami sostenuti per campioni di ordine 2 estratti senza ripetizione e si calcoli il valore atteso e la varianza.

Effettuando un'estrazione senza ripetizione di due unità, l'universo dei campioni è costituito da $N\left(N-1\right)=4\cdot 3=12$[1] elementi. Essi sono:

$$\begin{matrix} U_1U_2 & U_1U_3 & U_1U_4 \\ U_2U_1 & U_2U_3 & U_2U_4 \\ U_3U_1 & U_3U_2 & U_3U_4 \\ U_4U_1 & U_4U_2 & U_4U_3 \end{matrix}$$

Il corrispondente universo dei campioni di determinazioni del carattere X (numero di esami sostenuti nella sessione…..) risulta:

$$\begin{matrix} (1,1) & (1,3) & (1,5) \\ (1,1) & (1,3) & (1,5) \\ (3,1) & (3,1) & (3,5) \\ (5,1) & (5,1) & (5,3) \end{matrix}$$

Poiché ciascuna unità ha la stessa probabilità di essere estratta, ogni campione ha probabilità pari a 1/12 di presentarsi. Le mediane dei 12 campioni sono:

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 4 \\ 3 & 3 & 4 \end{matrix}$$

La distribuzione campionaria della mediana risulta:

$$\begin{matrix} \overline{X}_{Me}: & 1 & 2 & 3 & 4 \\ f\left(\overline{X}_{Me}\right): & 1/6 & 2/6 & 2/6 & 1/6 \end{matrix}$$

$$E\left(\overline{X}_{Me}\right)=1\cdot 1/6+2\cdot 2/6+3\cdot 2/6+4\cdot 1/6=2.5$$

$$Var\left(\overline{X}_{Me}\right)=1^2\cdot 1/6+2^2\cdot 2/6+3^2\cdot 2/6+4^2\cdot 1/6-2.5^2=0.917$$

---

[1] In generale, il numero di possibili campioni di ordine *n* che possono essere estratti senza ripetizione da una popolazione di *N* elementi è: $N\left(N-1\right)\left(N-2\right)\ldots\left(N-n+1\right)$. Ad esempio, il numero di possibili campioni di ordine 4 estraibili da una popolazione di 10 elementi è: *10(10-1)(10-2)(10-3)=5040.*