Università degli Studi di Cassino, Anno accademico 2004-2005
Corso di Statistica 2, Prof. M. Furno

Esercitazione del 1/02/2005
dott. Claudio Conversano

Esercizio 1

Il tempo di percorrenza del treno che collega la stazione di Roma Termini con l'aeroporto L. Da Vinci di Fiumicino è di 30 minuti esatti. Il percorso è lungo 30 km. e la velocità di percorrenza è costante durante tutta la tratta.

a) Si è interessati a valutare la probabilità che il treno interrompa la corsa tra il 15-mo km. ed il 19-mo km. per un guasto improvviso. Quanto vale tale probabilità?
b) Calcolare il valore atteso e la varianza della distribuzione di riferimento.

SVOLGIMENTO

a) Si è interessati a valutare la probabilità che il treno interrompa la corsa tra il 15-mo km. ed il 19-mo km. per un guasto improvviso. Quanto vale tale probabilità?

Poiché la velocità di percorrenza del treno è costante è lecito attendersi che la probabilità che il treno interrompa improvvisamente la corsa per un guasto improvviso è costante durante tutta la tratta di percorrenza, e quindi pari ad 1/30. La variabile casuale di riferimento X "il treno arresta la sua corsa all'*i*-mo km. per un guasto improvviso" è quindi la uniforme discreta.

Dal 15-mo al 19-mo chilometro il treno percorre 5 dei 30 km. di percorrenza totale. La probabilità richiesta è pertanto:

$$P(15 \leq X \leq 19) = P\left[(X=15)\cup(X=16)\cup(X=17)\cup(X=18)\cup(X=19)\right] = 1/30 \cdot 5 = 0.17$$

b) Calcolare il valore atteso e la varianza della distribuzione di riferimento.

Il valore atteso e la varianza della variabile casuale X sono pari a:

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \frac{1}{n} = \frac{n+1}{2} = \frac{30+1}{2} = 15.5$$

$$Var(X) = \sum_{i=1}^{n} \left(x_i - E(X)\right)^2 \frac{1}{n} = \frac{n^2-1}{12} = \frac{30^2-1}{12} = 75.08$$

Esercizio 2

Un giocatore appassionato del gioco del lotto ha osservato che il numero 33 è "ritardatario" sulla ruota di Roma da 100 settimane. Egli è intenzionato a puntare una certa somma di danaro sull'uscita del numero 33 come primo estratto sulla ruota di Roma nella prossima estrazione del lotto. Calcolare la probabilità di vincita alla prossima estrazione e definire la variabile casuale che descrive i possibili esiti della prova calcolando il valore atteso e la varianza.

SVOLGIMENTO

La prova è assimilabile ad una estrazione di una pallina da un'urna che contiene 90 palline numerate da 1 a 90. Poiché si effettua una sola prova ed i possibili risultati sono due (uscita del numero 33 = successo, uscita di un altro numero = insuccesso), la v.c. che descrive i risultati di questo esperimento è una v.c. di Bernoulli di parametri $n=1$ e $p=1/90=0.011$ (corrispondente alla probabilità di vincita alla prossima estrazione).

Il valore atteso e la varianza della variabile casuale X sono pari a:

$$E(X) = p = 0.0\overline{1}$$

$$Var(X) = p(1-p) = \frac{1}{90}\left(1-\frac{1}{90}\right) = 0.98\overline{8}$$

Esercizio 3

Una azienda tessile produce jeans con una percentuale pari all'1% dei capi difettosi. Su una produzione giornaliera di 300 pezzi, si chiede qual è la probabilità:

a) di avere 4 capi difettosi;
b) almeno 5 capi difettosi;
c) di avere al più 3 capi difettosi;
d) di avere un numero di capi difettosi compreso tra 2 e 4.
e) calcolare il valore atteso, la varianza e lo scarto quadratico medio della v.c. percentuale di pezzi difettosi.

SVOLGIMENTO

La prova è assimilabile ad una estrazione con reintroduzione di 300 palline da un'urna sapendo che la probabilità di successo (rappresentata in questo caso dall'evento "il capo estratto è difettoso") è pari a 0.01. Poiché si effettuano 300 prove indipendenti ed i possibili risultati sono due (estrazione di un capo difettoso = successo, estrazione di un capo non difettoso = insuccesso), la v.c. che descrive i risultati di questo esperimento è una v.c. Binomiale di parametri *n=300* e *p=0.01*.

a) probabilità di avere 4 capi difettosi;

$$P(X=x)=f(x)=\binom{n}{x}p^x q^{n-x}=\frac{n!}{x!(n-x)!}p^x q^{n-x}$$

$$P(X=4)=f(4)=\binom{300}{4}0{,}01^4 0{,}99^{300-4}=\frac{300!}{4!(300-4)!}0{,}01^4 0{,}99^{300-4}=0{,}1689$$

b) probabilità di avere almeno 5 capi difettosi;

$$P(X\geq 5)=\sum_{i=5}^{300}\binom{300}{i}0{,}01^i 0{,}99^{300-i}=1-F(x_5)=1-\sum_{i=0}^{4}\binom{300}{i}0{,}01^i 0{,}99^{300-i}$$

$$P(X=0)=f(0)=\binom{300}{0}0{,}01^0 0{,}99^{300-0}=0{,}049$$

$$P(X=1)=f(1)=\binom{300}{1}0{,}01^1 0{,}99^{300-1}=0{,}1486$$

$$P(X=2)=f(2)=\binom{300}{2}0{,}01^2 0{,}99^{300-2}=0{,}2244$$

$$P(X=3)=f(3)=\binom{300}{3}0{,}01^3 0{,}99^{300-3}=0{,}2252$$

$$P(X\geq 5)=1-(0.049+0.1486+0.2244+0.2252+0.1689)=1-0{,}8161=0{,}1839$$

c) probabilità di avere al più 3 capi difettosi;

$$P(X \le 3) = F(x_3) = \sum_{i=0}^{3} \binom{300}{i} 0{,}01^i 0{,}99^{300-i} = 0.049 + 0.1486 + 0.2244 + 0.2252 = 0.6452$$

d) di avere un numero di capi difettosi compreso tra 2 e 4.

$$P(2 \le X \le 4) = F(x_4) - F(x_2) = \sum_{i=2}^{4} \binom{300}{i} 0{,}01^i 0{,}99^{300-i} = 0.2244 + 0.2252 + 0.1689 = 0.6185$$

e) calcolare il valore atteso, la varianza e lo scarto quadratico medio della v.c. percentuale di pezzi difettosi.

$$E(X) = n \cdot p = 300 \cdot 0.01 = 3$$
$$Var(X) = n \cdot p \cdot (1-p) = 300 \cdot 0.01 \cdot 0.99 = 2.97$$
$$\sqrt{Var(X)} = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)} = \sqrt{300 \cdot 0.01 \cdot 0.99} = \sqrt{2.97} = 1.723$$

Esercizio 4

Dai dati relativi al censimento ISTAT del 1960 risulta che la distribuzione X delle altezze dei coscritti alla leva di mare e di terra sia ben approssimata da un v.c. normale con media 172.7 cm. e scarto quadratico medio 6.7 cm.. Estraendo a caso un individuo da questa popolazione, si chiede con quale probabilità:

a) questo individuo ha un'altezza pari all'altezza media della popolazione
b) la sua altezza è inferiore all'altezza media della popolazione
c) la sua altezza è superiore a 152 cm.
d) Determinare quella altezza al di sopra della quale si trova il 5% degli individui
e) Determinare gli estremi dell'intervallo, centrato su 172.7, all'interno del quale viene a trovarsi l'80% dei coscritti.
f) Supponendo che tutti gli individui della popolazione portino scarpe con un tacco di 10 cm., con che probabilità l'altezza (con scarpe ai piedi) dell'individuo estratto è superiore a 162 cm.

SVOLGIMENTO

a) probabilità che individuo ha un'altezza pari all'altezza media della popolazione

La risposta a questo quesito è "la probabilità richiesta è pari a zero". Infatti X è una v.c. continua e quindi $P(X = \mu_X) = 0$

b) probabilità che la sua altezza è inferiore all'altezza media della popolazione

$$P(X < \mu_X) = P\left(Z < \frac{\mu_X - \mu_X}{\sigma_X}\right) = P(Z < 0) = \Phi(0) = \frac{1}{2}$$

c) probabilità che la sua altezza è superiore a 152 cm.

$$P(X > 152) = P\left(Z > \frac{152 - \mu_X}{\sigma_X}\right) = P\left(Z > \frac{152 - 172.7}{6.7}\right) = P(Z > -3.1) = 1 - \Phi(3.1) = 1 - 0.00097 = .99903$$

d) Determinare quella altezza al di sopra della quale si trova il 5% degli individui

$$P(X \geq x_0) = P(Z \geq z_0) = P\left(Z \geq \frac{x_0 - \mu}{\sigma}\right) = 0.05$$

Occorre trovare sulle tavole il valore z_0 per il quale risulta $P(Z \leq z_0) = 0.95$. Tale valore è:

$$z_0 = \frac{x_0 - \mu}{\sigma} = 1.65$$

da cui:

$$x_0 = \mu + 1.65\sigma = 172.7 + (1.65 \cdot 6.7) = 183.755$$

e) **Determinare gli estremi dell'intervallo, centrato su 172.7, all'interno del quale viene a trovarsi l'80% dei coscritti.**

In questo caso si vogliono conoscere gli estremi *a* e *b* dell'intervallo, centrato su μ, che comprende un livello di probabilità fissato *p*. Si tratta di trovare sulle tavole un valore z_0 tale che:

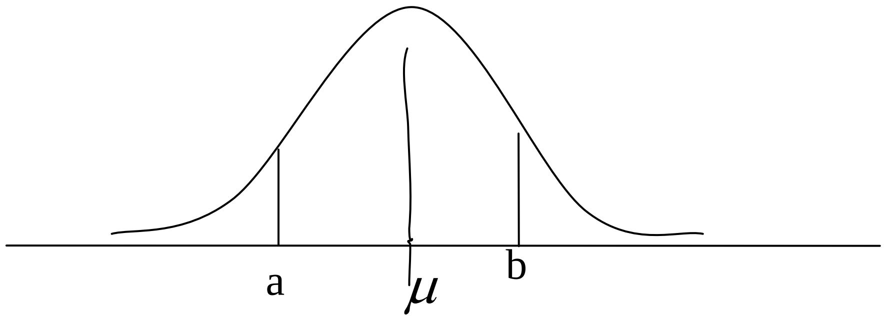
$$P(-z_0 < Z < z_0) = p$$

$$P\left(-z_0 < \frac{X-\mu}{\sigma} < z_0\right) = p$$

$$P(-z_0\sigma < X - \mu < z_0\sigma) = p$$

$$P(\mu - z_0\sigma < X < \mu + z_0\sigma) = p$$

$$P(a < X < b) = p$$



Nel caso in esame, dalle tavole della v.c. normale standardizzata risulta:

$$P(-1.285 < Z < 1.285) = 0.80$$

$$P\left(-1.285 < \frac{X-172.7}{6.7} < 1.285\right) = 0.80$$

$$P(-1.285 \cdot 6.7 < X - 172.7 < 1.285 \cdot 6.7) = 0.80$$

$$P(172.7 - 1.285 \cdot 6.7 < X < 172.7 + 1.285 \cdot 6.7) = 0.80$$

$$P(164.09 < X < 181.31) = 0.80$$

f) **Supponendo che tutti gli individui della popolazione portino scarpe con un tacco di 10 cm., con che probabilità l'altezza (con scarpe ai piedi) dell'individuo estratto è superiore a 162 cm.**

In questo caso la variabile casuale X viene trasformata in una nuova variabile casuale Y attraverso una traslazione $Y = X + 10$. La v.c. Y è ancora una v.c. normale con varianza σ_Y^2 e media pari a $\mu_X + 10$. L'evento di cui ci interessa calcolare la probabilità è "$Y > 162$". Si procede come segue:

$$P(Y > 162) = P(X + 10 > 162) = P(X > 152) = 0.99903$$