Università degli Studi di Cassino, Anno accademico 2004-2005
Corso di Statistica 2, Prof. M. Furno

Esercitazione del 1/02/2005
dott. Claudio Conversano

Esercizio 1
Si supponga di lanciare simultaneamente 3 dadi; si vince se la somma dei punteggi ottenuti è maggiore di 16. Calcolare:

a) la probabilità di ottenere 3 successi in 5 prove;
b) la probabilità di ottenere non meno di 3 successi in 5 prove

SVOLGIMENTO

L'esperimento consiste nello svolgimento di 5 prove indipendenti ognuna delle quali può dar luogo a due possibili risultati (la somma dei punteggi ottenuti è maggiore di 16 = successo; la somma dei punteggi ottenuti è minore o uguale a 16 = insuccesso). E' possibile fare quindi riferimento alla v.c. Binomiale ipotizzando il numero di sottoprove *n* uguale a 5. La probabilità di successo in una prova (parametro *p* della Binomiale) deve essere calcolata tenendo presenti i possibili risultati della prova.

L'evento "la somma dei punteggi ottenuti è maggiore di 16" si verifica se nelle tre estrazioni si totalizza un punteggio pari a 17 (due dadi presentano la faccia "6" ed uno la faccia "5") oppure un punteggio pari a 18 (i 3 dadi presentano tutti la faccia "6"). Definiamo gli eventi elementari:

$E_5^{(i)}$: si estrae una pallina con il numero 5 nella *i*-ma estrazione $(i = 1,2,3)$;
$E_6^{(i)}$: si estrae una pallina con il numero 6 nella *i*-ma estrazione $(i = 1,2,3)$;

La probabilità di successo in una singola sottoprova corrisponde all'unione dei quattro eventi composti:

$$p = P\left[\left(E_6^{(1)} \cap E_6^{(2)} \cap E_5^{(3)}\right) \cup \left(E_6^{(1)} \cap E_5^{(2)} \cap E_6^{(3)}\right) \cup \left(E_5^{(1)} \cap E_6^{(2)} \cap E_6^{(3)}\right) \cup \left(E_6^{(1)} \cap E_6^{(2)} \cap E_6^{(3)}\right)\right] =$$
$$= 4 \cdot \left(\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6}\right) = 0.0031$$

a) la probabilità di ottenere 3 successi in 5 prove;

$$P(X = x) = f(x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x} = \frac{n!}{x!(n-x)!} p^x q^{n-x}$$

$$P(X = 3) = \binom{5}{3} \cdot 0.0031^3 \cdot 0.9969^{5-3} = \frac{5!}{3!(5-3)!} \cdot 0.0031^3 \cdot 0.9969^2 = 0.00000295$$

b) la probabilità di ottenere non meno di 3 successi in 5 prove

$$P(X \geq 3) = P(X = 3 \cup X = 4 \cup X = 5) = 0.00000295 + \mathrm{P(X = 4)} + \mathrm{P(X = 5)} =$$

$$= 0.00000295 + \binom{5}{4} \cdot 0.0031^4 \cdot 0.9969^{5-4} + \binom{5}{5} \cdot 0.0031^5 \cdot 0.9969^{5-5} =$$

$$= 0.00000295 + 0.000000000460 + 0.000000000000286 = 0.00000295$$

Esercizio 2
Una tabaccheria vende biglietti della lotteria del tipo "gratta e vinci". Su una partita di 1.000 biglietti, 5 di essi sono vincenti. I biglietti vengono suddivisi in modo casuale in blocchetti di 20 unità che vengono venduti al pubblico uno dopo l'altro (esaurito il primo blocchetto si passa al secondo, e così via). Qual è la probabilità che una persona che acquista un intero blocchetto ottenga uno o più biglietti vincenti?

SVOLGIMENTO

La risposta può essere ottenuta ricorrendo alla v.c. binomiale, i cui parametri sono n=20 e p= 5/1.000=0,005;

La probabilità richiesta è:

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - f(0) = 1 - \binom{20}{0} 0{,}005^{0} (1 - 0{,}005)^{20-0} = 1 - 0{,}9046104803 = 0{,}0953895197$$

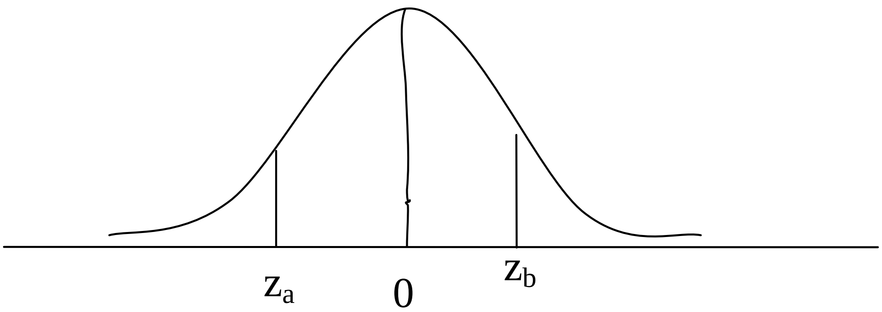
Esercizio 3

In un panificio si producono panini il cui peso non è costante, ma varia e più precisamente segue una distribuzione normale con media 100 grammi e scarto quadratico medio 2 grammi. Si vuole conoscere la probabilità che il peso di un panino preso a caso non abbia più dell'1% di scarto dal peso medio.

SVOLGIMENTO

Si tratta di calcolare:

$$P(a < X < b) = P\left(\frac{a-\mu}{\sigma} < \frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{X+\mu}{\sigma}\right) = P(z_a < Z < z_b) = P(0 < Z < z_b) - P(0 < Z < z_a)$$



Nel caso in esame si vuole conoscere la probabilità che la v.c. X assuma valori compresi all'interno dell'intervallo *(a,b)*, con *a* e *b* fissati e *a<b.*

$$P(9.9 < X < 10.1) = P\left(\frac{9.9-10}{0.2} < \frac{X-10}{0.2} < \frac{10.1+10}{0.2}\right) = P(-0.5 < Z < 0.5) = 2P(0 < Z < 0.5) = 2 \cdot 0.1915 = 0.383$$

Esercizio 4

Essendo X una v.c. che si distribuisce normalmente con media incognita μ e varianza incognita σ^2, trovare:

a) $P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma)$,

b) $P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma)$,

c) $P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma)$.

SVOLGIMENTO

a) $P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) = P\left(\frac{(\mu - \sigma) - \mu}{\sigma} < \frac{X - \mu}{\sigma} < \frac{(\mu - \sigma) + \mu}{\sigma}\right) =$

$$P(-1 > Z < 1) = 2P(0 < Z < 1) = 2 \cdot 0.3413 = 0.6826$$

b) $P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) = P\left(\frac{(\mu - 2\sigma) - \mu}{\sigma} < \frac{X - \mu}{\sigma} < \frac{(\mu - 2\sigma) + \mu}{\sigma}\right) =$

$$P(-2 > Z < 2) = 2P(0 < Z < 2) = 2 \cdot 0.4772 = 0.9544$$

c) $P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) = P\left(\frac{(\mu - 3\sigma) - \mu}{\sigma} < \frac{X - \mu}{\sigma} < \frac{(\mu - 3\sigma) + \mu}{\sigma}\right) =$

$$P(-3 > Z < 3) = 2P(0 < Z < 3) = 2 \cdot 0.4987 = 0.9974$$

Quindi in una v.c. normale la probabilità che un valore x della v.c. cada all'interno dell'intervallo $[(\mu - 3\sigma), (\mu + 3\sigma)]$ è prossima ad 1.