Università degli Studi di Cassino, Anno accademico 2004-2005
Corso di Statistica 2, Prof. M. Furno

Esercitazione del 25/1/2005
dott. Claudio Conversano

Esercizio 1
In un casinò un gioco consiste nel lanciare simultaneamente tre monete e nell'effettuare la somma dei punteggi ottenuti (considerando per il lancio di una moneta pari ad 1 il risultato "Testa" ed a 2 il risultato "Croce"). Si vince se il punteggio ottenuto è maggiore di 4.

a) Rappresentare graficamente la funzione di probabilità e la funzione di ripartizione della variabile casuale che rappresenta i risultati del gioco.
b) Calcolare il valore atteso e la varianza della variabile casuale definita al punto a).
c) Calcolare la probabilità di vittoria effettuando una unica prova.

SVOLGIMENTO

a) Rappresentare graficamente la funzione di probabilità e la funzione di ripartizione della variabile casuale che rappresenta i risultati del gioco.

Per costruire la variabile casuale che rappresenta i risultati del gioco bisogna dapprima considerare tutti i possibili risultati del gioco, e quindi lo spazio campionario.

$$S=\{(T,T,T)\quad(T,C,T)\quad(T,T,C)\quad(C,T,T)\quad(T,C,C)\quad(C,T,C)\quad(C,C,T)\quad(C,C,C)\}$$

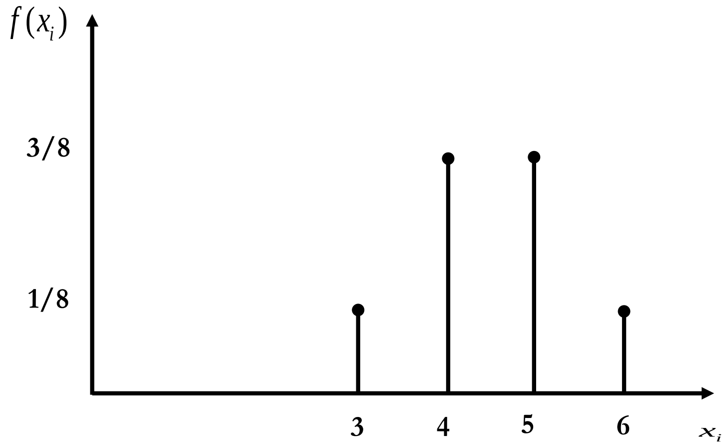
Considerando che nel lancio di una moneta al risultato "Testa" corrisponde il punteggio 1 ed al risultato "Croce" il punteggio 2 associamo ad ogni evento dello spazio campionario la somma dei punteggi ottenuti e la relativa probabilità.

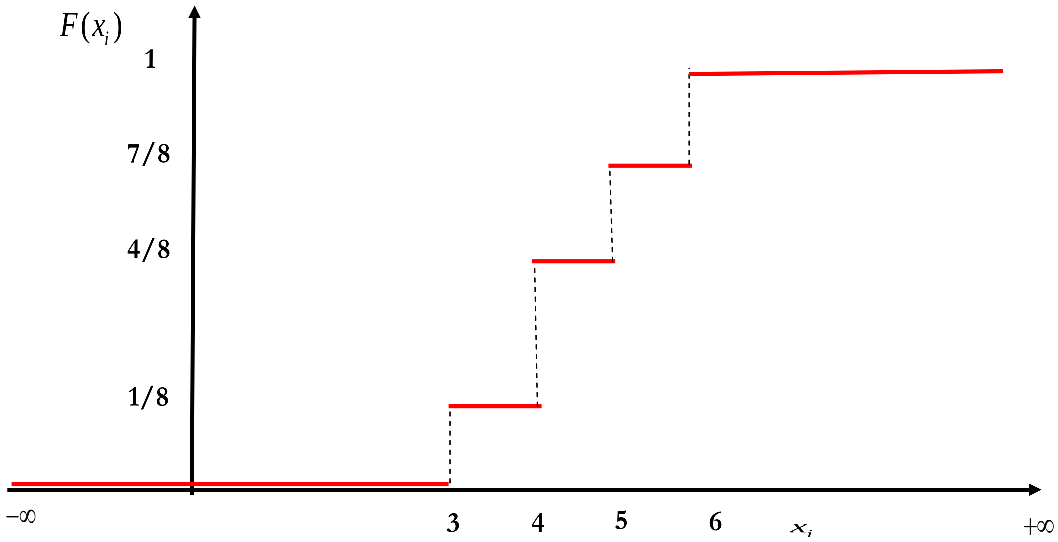
E_i:	(T,T,T)	(T,C,T)	(T,T,C)	(C,T,T)	(T,C,C)	(C,T,C)	(C,C,T)	(C,C,C)
x_i:	3	4	4	4	5	5	5	6
$f(x_i)$:	1/8	1/8	1/8	1/8	1/8	1/8	1/8	1/8

La v.c. relativa ai risultati del gioco sarà:

x_i:	3	4	5	6
$f(x_i)$:	1/8	3/8	3/8	1/8
$F(x_i)$:	1/8	4/8	7/8	1

Rappresentiamo graficamente la funzione di probabilità e la funzione di ripartizione





b) Calcolare il valore atteso e la varianza della variabile casuale definita al punto a).

$$E(X) = \sum_{i=1}^{k} x_i f(x_i) = 3 \cdot 1/8 + 4 \cdot 3/8 + 5 \cdot 3/8 + 6 \cdot 1/8 = 4.5$$

$$Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \sum_{i=1}^{k} x_i^2 f(x_i) - 4.125^2 = 3^2 \cdot 1/8 + 4^2 \cdot 3/8 + 5^2 \cdot 3/8 + 6^2 \cdot 1/8 - 4.5^2 = 0.75$$

c) Calcolare la probabilità di vittoria effettuando una unica prova.

L'evento vincita al gioco si verifica nel caso di punteggio maggiore di 4. Si definiscono gli eventi:
E_5 : il punteggio della prova è 5;
E_6 : il punteggio della prova è 6.
La probabilità di vincita in una prova è:
$P(E_5 \cup E_6) = 3/8 + 1/8 = 0.5$

Esercizio 2

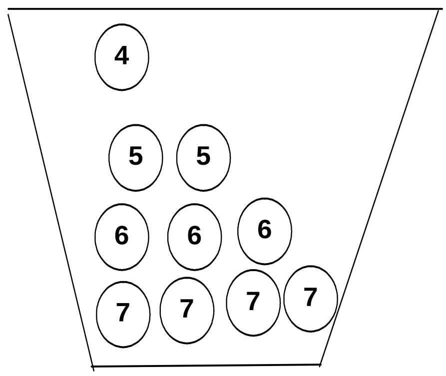
Sia data un urna contenente 10 palline identiche a meno del fatto che una è identificata dal valore 4, due dal valore 5, tre dal valore 6 e quattro dal valore 7.

a) Si estraggano senza reintroduzione due palline: si calcoli la probabilità che la somma dei valori sulle palline sia 10 oppure 12;
b) Si calcoli il valore atteso e la varianza della v.c. "punteggio ottenuto nell'estrazione senza reintroduzione di due palline".

SVOLGIMENTO

a) Si estraggano senza reintroduzione due palline: si calcoli la probabilità che la somma dei valori sulle palline sia 10 oppure 12;

La composizione dell'urna può essere rappresentata nella figura seguente:



L'evento "la somma delle due palline estratte è 10" si verifica se nelle due estrazioni si estrae una pallina contrassegnata dal numero 5 oppure una contrassegnata dal numero 6 ed una contrassegnata dal numero 4, mentre l' evento "la somma delle due palline estratte è 12" si verifica se nelle due estrazioni si estrae una pallina contrassegnata dal numero 6 oppure una contrassegnata dal numero 5 ed una contrassegnata dal numero 7. Definiamo gli eventi elementari:

$E_4^{(i)}$: si estrae una pallina con il numero 4 nella *i*-ma estrazione $(i=1,2)$;
$E_5^{(i)}$: si estrae una pallina con il numero 5 nella *i*-ma estrazione $(i=1,2)$;
$E_6^{(i)}$: si estrae una pallina con il numero 6 nella *i*-ma estrazione $(i=1,2)$;
$E_7^{(i)}$: si estrae una pallina con il numero 7 nella *i*-ma estrazione $(i=1,2)$.

Essendo lo schema di estrazione senza reintroduzione (la pallina estratta per prima non viene riposta nell'urna prima della seconda estrazione), bisogna far riferimento alle probabilità condizionate (il risultato della seconda estrazione dipende da quello della prima estrazione). La probabilità richiesta corrisponde all'unione di due eventi composti:

$$P\left\{\left[\left(E_5^{(1)}\cap E_5^{(2)}\right)\cup\left(E_6^{(1)}\cap E_4^{(2)}\right)\cup\left(E_4^{(1)}\cap E_6^{(2)}\right)\right]\cup\left[\left(E_6^{(1)}\cap E_6^{(2)}\right)\cup\left(E_7^{(1)}\cap E_5^{(2)}\right)\cup\left(E_5^{(1)}\cap E_7^{(2)}\right)\right]\right\}=$$

$$=\left[P\left(E_5^{(1)}\right)P\left(E_5^{(2)}\mid E_5^{(1)}\right)+P\left(E_6^{(1)}\right)P\left(E_4^{(2)}\mid E_6^{(1)}\right)+P\left(E_4^{(1)}\right)P\left(E_6^{(2)}\mid E_4^{(1)}\right)\right]+$$

$$+\left[P\left(E_6^{(1)}\right)P\left(E_6^{(2)}\mid E_6^{(1)}\right)+P\left(E_7^{(1)}\right)P\left(E_7^{(2)}\mid E_5^{(1)}\right)+P\left(E_5^{(1)}\right)P\left(E_5^{(2)}\mid E_7^{(1)}\right)\right]=$$

$$\left(2/10\cdot 2/9+3/10\cdot 1/9+1/10\cdot 3/9\right)+\left(3/10\cdot 2/9+4/10\cdot 2/9+2/10\cdot 4/9\right)=$$

$$=10/90+20/90=0.33$$

b) Si calcoli il valore atteso e la varianza della v.c. "punteggio ottenuto nell'estrazione senza reintroduzione di due palline".

Per costruire la variabile casuale che rappresenta i risultati del gioco bisogna dapprima considerare tutti i possibili risultati del gioco, e quindi lo spazio campionario.

$$S=\begin{Bmatrix} \left(E_4^{(1)}\cap E_5^{(2)}\right) & \left(E_4^{(1)}\cap E_6^{(2)}\right) & \left(E_4^{(1)}\cap E_7^{(2)}\right) & \\ \left(E_5^{(1)}\cap E_4^{(2)}\right) & \left(E_5^{(1)}\cap E_5^{(2)}\right) & \left(E_5^{(1)}\cap E_6^{(2)}\right) & \left(E_5^{(1)}\cap E_7^{(2)}\right) \\ \left(E_6^{(1)}\cap E_4^{(2)}\right) & \left(E_6^{(1)}\cap E_5^{(2)}\right) & \left(E_6^{(1)}\cap E_6^{(2)}\right) & \left(E_6^{(1)}\cap E_7^{(2)}\right) \\ \left(E_7^{(1)}\cap E_4^{(2)}\right) & \left(E_7^{(1)}\cap E_5^{(2)}\right) & \left(E_7^{(1)}\cap E_6^{(2)}\right) & \left(E_7^{(1)}\cap E_7^{(2)}\right) \end{Bmatrix}$$

Associamo ad ogni evento dello spazio campionario il risultato dell'esperimento e la relativa probabilità:

E_i	x_i	$f(x_i)$
$\left(E_4^{(1)} \cap E_5^{(2)}\right)$	9	$1/10 \cdot 2/9 = 0.0\overline{2}$
$\left(E_4^{(1)} \cap E_6^{(2)}\right)$	10	$1/10 \cdot 3/9 = 0.0\overline{3}$
$\left(E_4^{(1)} \cap E_7^{(2)}\right)$	11	$1/10 \cdot 4/9 = 0.0\overline{4}$
$\left(E_5^{(1)} \cap E_4^{(2)}\right)$	9	$2/10 \cdot 1/9 = 0.0\overline{2}$
$\left(E_5^{(1)} \cap E_5^{(2)}\right)$	10	$2/10 \cdot 1/9 = 0.0\overline{2}$
$\left(E_5^{(1)} \cap E_6^{(2)}\right)$	11	$2/10 \cdot 3/9 = 0.0\overline{6}$
$\left(E_5^{(1)} \cap E_7^{(2)}\right)$	12	$2/10 \cdot 4/9 = 0.0\overline{8}$
$\left(E_6^{(1)} \cap E_4^{(2)}\right)$	10	$3/10 \cdot 1/9 = 0.0\overline{3}$
$\left(E_6^{(1)} \cap E_5^{(2)}\right)$	11	$3/10 \cdot 2/9 = 0.0\overline{6}$
$\left(E_6^{(1)} \cap E_6^{(2)}\right)$	12	$3/10 \cdot 2/9 = 0.0\overline{6}$
$\left(E_6^{(1)} \cap E_7^{(2)}\right)$	13	$3/10 \cdot 4/9 = 0.1\overline{3}$
$\left(E_7^{(1)} \cap E_4^{(2)}\right)$	11	$4/10 \cdot 1/9 = 0.0\overline{4}$
$\left(E_7^{(1)} \cap E_5^{(2)}\right)$	12	$4/10 \cdot 2/9 = 0.0\overline{8}$
$\left(E_7^{(1)} \cap E_6^{(2)}\right)$	13	$4/10 \cdot 3/9 = 0.1\overline{3}$
$\left(E_7^{(1)} \cap E_7^{(2)}\right)$	14	$4/10 \cdot 3/9 = 0.1\overline{3}$

La v.c. relativa ai risultati del gioco sarà:

x_i:	9	10	11	12	13	14
$f(x_i)$:	0.04	0.09	0.22	0.24	0.28	0.12
$F(x_i)$:	0.04	0.13	0.35	0.59	0.87	1.00

Calcolo del valore atteso e della varianza:

$$E(X) = \sum_{i=1}^{k} x_i f(x_i) = 9 \cdot 0.04 + 10 \cdot 0.09 + 11 \cdot 0.22 + 12 \cdot 0.24 + 13 \cdot 0.28 + 14 \cdot 0.12 = 11.88$$

$$Var(X) = E(X^2) - \left[E(X)\right]^2 = \sum_{i=1}^{k} x_i^2 f(x_i) - 11.88^2 =$$
$$= 9^2 \cdot 0.04 + 10^2 \cdot 0.09 + 11^2 \cdot 0.22 + 12^2 \cdot 0.24 + 13^2 \cdot 0.28 + 14^2 \cdot 0.12 - 11.88^2 =$$
$$= 144.26 - 141.1344 = 3.1256$$

Esercizio 3

Siano date 2 urne, ognuna delle quali contiene 5 palline omogenee numerate con i numeri 1,2,3,4,5. Si estraggono 2 palline (una da ogni urna) e si osservano i 2 numeri risultanti. Si definiscono due variabili casuali nel modo seguente:

$$X = \begin{cases} 1 & \text{se la somma dei numeri sulle due palline estratte è minore di 6} \\ 2 & \text{se la somma dei numeri sulle due palline estratte è maggiore o uguale 6} \end{cases}$$

$$Y = \begin{cases} 1 & \text{se la differenza tra il primo numero estratto ed il secondo è minore di 2} \\ 2 & \text{se la differenza tra il primo numero estratto ed il secondo è maggiore o uguale a 2} \end{cases}$$

Costruire la v.c. doppia (X,Y), riportando la distribuzione di probabilità della v.c. (X,Y), della v.c. X e della v.c. Y. Calcolare inoltre la covarianza e la correlazione tra le v.c. X ed Y.

SVOLGIMENTO

Indicando con $E_j^{(i)}$ $(i=1,\ldots\ldots,5;),(j=1,2)$ l'evento uscita della pallina numero *i* nella *j*-ma estrazione, per costruire la variabile casuale che rappresenta i risultati del gioco bisogna dapprima considerare tutti i possibili risultati del gioco, e quindi lo spazio campionario.

$$S = \begin{Bmatrix} \left(E_1^{(1)} \cap E_2^{(1)}\right) & \left(E_1^{(1)} \cap E_2^{(2)}\right) & \left(E_1^{(1)} \cap E_2^{(3)}\right) & \left(E_1^{(1)} \cap E_2^{(4)}\right) & \left(E_1^{(1)} \cap E_2^{(5)}\right) \\ \left(E_1^{(2)} \cap E_2^{(1)}\right) & \left(E_1^{(2)} \cap E_2^{(2)}\right) & \left(E_1^{(2)} \cap E_2^{(3)}\right) & \left(E_1^{(2)} \cap E_2^{(4)}\right) & \left(E_1^{(2)} \cap E_2^{(5)}\right) \\ \left(E_1^{(3)} \cap E_2^{(1)}\right) & \left(E_1^{(3)} \cap E_2^{(2)}\right) & \left(E_1^{(3)} \cap E_2^{(3)}\right) & \left(E_1^{(3)} \cap E_2^{(4)}\right) & \left(E_1^{(3)} \cap E_2^{(5)}\right) \\ \left(E_1^{(4)} \cap E_2^{(1)}\right) & \left(E_1^{(4)} \cap E_2^{(2)}\right) & \left(E_1^{(4)} \cap E_2^{(3)}\right) & \left(E_1^{(4)} \cap E_2^{(4)}\right) & \left(E_1^{(4)} \cap E_2^{(5)}\right) \\ \left(E_1^{(5)} \cap E_2^{(1)}\right) & \left(E_1^{(5)} \cap E_2^{(2)}\right) & \left(E_1^{(5)} \cap E_2^{(3)}\right) & \left(E_1^{(5)} \cap E_2^{(4)}\right) & \left(E_1^{(5)} \cap E_2^{(5)}\right) \end{Bmatrix}$$

Nello schema seguente riportiamo per ogni evento il risultato delle operazioni di somma e differenza. Poiché lo spazio campionario è formato da 25 eventi indipendenti, gli stessi eventi sono da considerarsi equiprobabili, per cui la probabilità associata al verificarsi di ciascuno di essi è costante e pari a 1/25.

Evento	**Probabilità**	**Somma**	**v.c. X**	**Differenza**	**v.c. Y**
$\left(E_1^{(1)} \cap E_2^{(1)}\right)$	$1/25$	+2	1	0	1
$\left(E_1^{(1)} \cap E_2^{(2)}\right)$	$1/25$	+3	1	-1	1
$\left(E_1^{(1)} \cap E_2^{(3)}\right)$	$1/25$	+4	1	-2	1
$\left(E_1^{(1)} \cap E_2^{(4)}\right)$	$1/25$	+5	1	-3	1
$\left(E_1^{(1)} \cap E_2^{(5)}\right)$	$1/25$	+6	2	-4	1

(segue dalla pagina precedente)

Evento	Probabilità	Somma	v.c. X	Differenza	v.c. Y
$\left(E_1^{(2)} \cap E_2^{(1)}\right)$	$1/25$	+3	1	+1	1
$\left(E_1^{(2)} \cap E_2^{(2)}\right)$	$1/25$	+4	1	0	1
$\left(E_1^{(2)} \cap E_2^{(3)}\right)$	$1/25$	+5	1	-1	1
$\left(E_1^{(2)} \cap E_2^{(4)}\right)$	$1/25$	+6	2	-2	1
$\left(E_1^{(2)} \cap E_2^{(5)}\right)$	$1/25$	+7	2	-3	1
$\left(E_1^{(3)} \cap E_2^{(1)}\right)$	$1/25$	+4	1	+2	2
$\left(E_1^{(3)} \cap E_2^{(2)}\right)$	$1/25$	+5	1	+1	1
$\left(E_1^{(3)} \cap E_2^{(3)}\right)$	$1/25$	+6	2	0	1
$\left(E_1^{(3)} \cap E_2^{(4)}\right)$	$1/25$	+7	2	-1	1
$\left(E_1^{(3)} \cap E_2^{(5)}\right)$	$1/25$	+8	2	-2	1
$\left(E_1^{(4)} \cap E_2^{(1)}\right)$	$1/25$	+5	1	+3	2
$\left(E_1^{(4)} \cap E_2^{(2)}\right)$	$1/25$	+6	2	+2	2
$\left(E_1^{(4)} \cap E_2^{(3)}\right)$	$1/25$	+7	2	+1	1
$\left(E_1^{(4)} \cap E_2^{(4)}\right)$	$1/25$	+8	2	0	1
$\left(E_1^{(4)} \cap E_2^{(5)}\right)$	$1/25$	+9	2	-1	1
$\left(E_1^{(5)} \cap E_2^{(1)}\right)$	$1/25$	+6	2	+4	2
$\left(E_1^{(5)} \cap E_2^{(2)}\right)$	$1/25$	+7	2	+3	2
$\left(E_1^{(5)} \cap E_2^{(3)}\right)$	$1/25$	+8	2	+2	2
$\left(E_1^{(5)} \cap E_2^{(4)}\right)$	$1/25$	+9	2	+1	1
$\left(E_1^{(5)} \cap E_2^{(5)}\right)$	$1/25$	+10	2	0	1

Per costruire la v.c. doppia (X,Y) bisogna considerare per ogni evento le realizzazioni congiunte delle v.c. X e Y e ed individuare le frequenze congiunte delle diverse realizzazioni.
In pratica, bisogna completare la tabella a doppia entrata che mette in relazione le realizzazioni della v.c. X con quelle della v.c. Y.

X \ Y	$y_1 = 1$	$y_2 = 2$	**Totale**
$x_1 = 1$	8	2	10
$x_2 = 2$	11	4	15
Totale	19	6	25

La distribuzione di probabilità della v.c. (X,Y) è la seguente:

$P(X = x_1 \cap Y = y_1) = f(x_1, y_1) = {}^{8}\!/_{25} = 0.32$;

$P(X = x_1 \cap Y = y_2) = f(x_1, y_2) = {}^{2}\!/_{25} = 0.08$;

$P(Y = x_2 \cap Y = y_1) = f(x_2, y_1) = {}^{11}\!/_{25} = 0.44$;

$P(X = x_2 \cap Y = y_2) = f(x_2, y_2) = {}^{4}\!/_{25} = 0.16$

Le distribuzioni di probabilità delle v.c. X e Y sono ottenute considerando le frequenze relative marginali:

v.c. X	**v.c. Y**
$P(X = x_1) = f(x_1) = {}^{10}\!/_{25} = 0.40$	$P(Y = y_1) = f(y_1) = {}^{19}\!/_{25} = 0.76$
$P(X = x_2) = f(x_2) = {}^{15}\!/_{25} = 0.60$	$P(Y = y_2) = f(y_2) = {}^{6}\!/_{25} = 0.24$

Per calcolare la covarianza e la correlazione tra le due v.c. x ed Y bisogna calcolare i valori attesi e le vazianze delle due v.c.

$$E(X) = \sum_{i=1}^{k} x_i f(x_i) = 1 \cdot 0.40 + 2 \cdot 0.60 = 1.60$$

$$Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \sum_{i=1}^{k} x_i^2 f(x_i) - 1.60^2 = 1^2 \cdot 0.4 + 2^2 \cdot 0.6 - 1.60^2 = 2.8 - 2.56 = 0.24$$

$$E(Y) = \sum_{i=1}^{k} y_i f(y_i) = 1 \cdot 0.76 + 2 \cdot 0.24 = 1.24$$

$$Var(Y) = E(Y^2) - [E(Y)]^2 = \sum_{i=1}^{k} y_i^2 f(y_i) - 1.24^2 = 1^2 \cdot 0.76 + 2^2 \cdot 0.24 - 1.24^2 = 1.72 - 1.54 = 0.18$$

Calcoliamo ora la covarianza e la correlazione:

$$Cov(X,Y) = E(XY) - [E(X)E(Y)] = \left[\sum_{i=1}^{k} (x_i y_i)\, f(x_i)\, f(y_i)\right] - E(X)E(Y) =$$
$$= (1 \cdot 1) \cdot 0.4 \cdot 0.76 + (1 \cdot 2) \cdot 0.4 \cdot 0.24 + (2 \cdot 1) \cdot 0.6 \cdot 0.76 + (2 \cdot 2) \cdot 0.6 \cdot 0.24 - 1.60 \cdot 1.24 = 0.1536$$

$$Corr(X,Y) = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X)}\sqrt{Var(Y)}} = \frac{0.1536}{\sqrt{0.24}\sqrt{0.28}} = 0.73413$$

Le due v.c. sono correlate positivamente.