

Esercitazione del 25/1/2005
dott. Claudio Conversano

Esercizio 1

Ad un certo tavolo di un casinò si gioca lanciando un dado. Il gioco consiste nel lanciare un dado regolare, i cui possibili esiti danno luogo alle seguenti vincite o perdite:

Esito della prova	Vincita o perdita
Uscita della faccia "uno"	Il giocatore paga 200 euro
Uscita della faccia "due"	Il giocatore vince 200 euro
Uscita della faccia "tre"	Il giocatore paga 300 euro
Uscita della faccia "quattro"	Il giocatore vince 300 euro
Uscita della faccia "cinque"	Il giocatore paga 100 euro
Uscita della faccia "sei"	Il giocatore vince 100 euro

Il signor X intende partecipare al gioco.

- a) Costruire la variabile casuale che descrive la Vincita/perdita al gioco in un lancio del dado;
- b) Calcolare il valore atteso e la varianza della variabile casuale costruita al punto a);
- c) Calcolare la probabilità di vincere 300 Euro effettuando due prove;

SVOLGIMENTO

La prova consiste nel lancio di un dado, per cui lo spazio campionario è costituito dall'insieme dei numeri compresi tra 1 e 6. Indichiamo con E_i ($i=1, \dots, 6$) l'evento "uscita della faccia i nel lancio del dado. I possibili risultati della prova, le probabilità e gli esiti del gioco sono:

E_i :	"uno"	"due"	"tre"	"quattro"	"cinque"	"sei"
x_i :	-200	+200	-300	+300	-100	+100
$f(x_i)$:	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

La v.c. relativa ai risultati del gioco sarà:

x_i :	-300	-200	-100	+100	+200	+300
$f(x_i)$:	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

- b) **Calcolare il valore atteso e la varianza della variabile casuale costruita al punto a);**

$$E(X) = \sum_{i=1}^k x_i f(x_i) = -300 \cdot 1/6 - 200 \cdot 1/6 - 100 \cdot 1/6 + 100 \cdot 1/6 + 200 \cdot 1/6 + 300 \cdot 1/6 = 0$$

$$\begin{aligned} \text{Var}(X) &= E(X^2) - [E(X)]^2 = \sum_{i=1}^k x_i^2 f(x_i) - 0^2 \\ &= (-300)^2 \cdot 1/6 + (-200)^2 \cdot 1/6 + (-100)^2 \cdot 1/6 + 100^2 \cdot 1/6 + 200^2 \cdot 1/6 + 300^2 \cdot 1/6 = 4666.6 \end{aligned}$$

c) **Calcolare la probabilità di vincere 300 Euro effettuando due prove;**

Per calcolare la probabilità di vincere 300 Euro dopo due prove bisogna considerare la probabilità dell'unione dei due eventi incompatibili relativi all'uscita della faccia "due" nel primo lancio e della faccia "sei" nel secondo, oppure all'uscita della faccia "sei" nel primo lancio e della faccia "due" nel secondo lancio:

$$P[(E_2 \cap E_6) \cup (E_6 \cap E_2)] = 1/6 \cdot 1/6 + 1/6 \cdot 1/6 = 0.0\bar{5}$$

Esercizio 2

In un casinò un gioco consiste nel lanciare simultaneamente tre monete. Per ogni faccia “testa” il giocatore paga 40 Euro, mentre per ogni faccia “croce” il giocatore vince 50 Euro.

- Definire la variabile casuale che rappresenta i risultati del gioco e rappresentare graficamente la funzione di probabilità e la funzione di ripartizione.
- Calcolare il valore atteso e la varianza della variabile casuale definita al punto a).
- Calcolare la probabilità di vincere 30 Euro effettuando due prove.

SVOLGIMENTO

- Definire la variabile casuale che rappresenta i risultati del gioco e rappresentare graficamente la funzione di probabilità e la funzione di ripartizione.**

Per costruire la variabile casuale che rappresenta i risultati del gioco bisogna dapprima considerare tutti i possibili risultati del gioco, e quindi lo spazio campionario.

$$S = \{(T,T,T) (T,C,T) (T,T,C) (C,T,T) (T,C,C) (C,T,C) (C,C,T) (C,C,C)\}$$

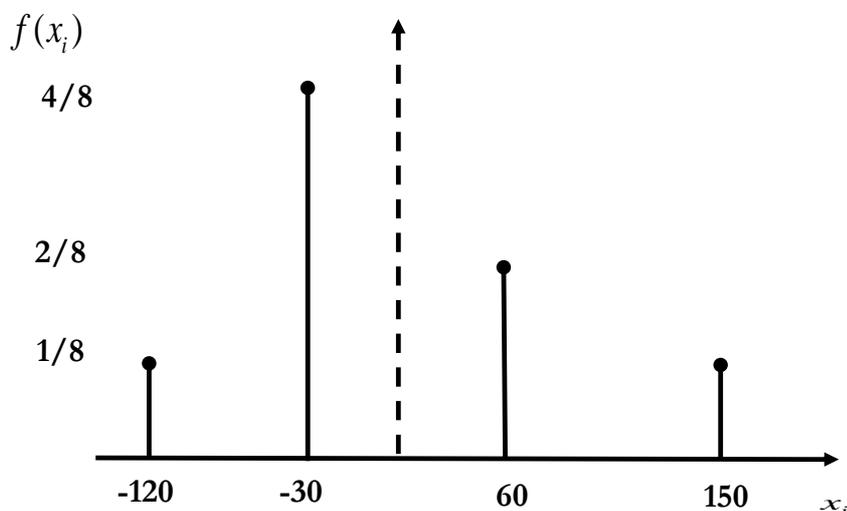
Considerando che nel lancio di una moneta al risultato “Testa” corrisponde una perdita di 40 Euro ed al risultato “Croce” un introito di 50 Euro, associamo ad ogni evento dello spazio campionario il risultato del gioco e la relativa probabilità.

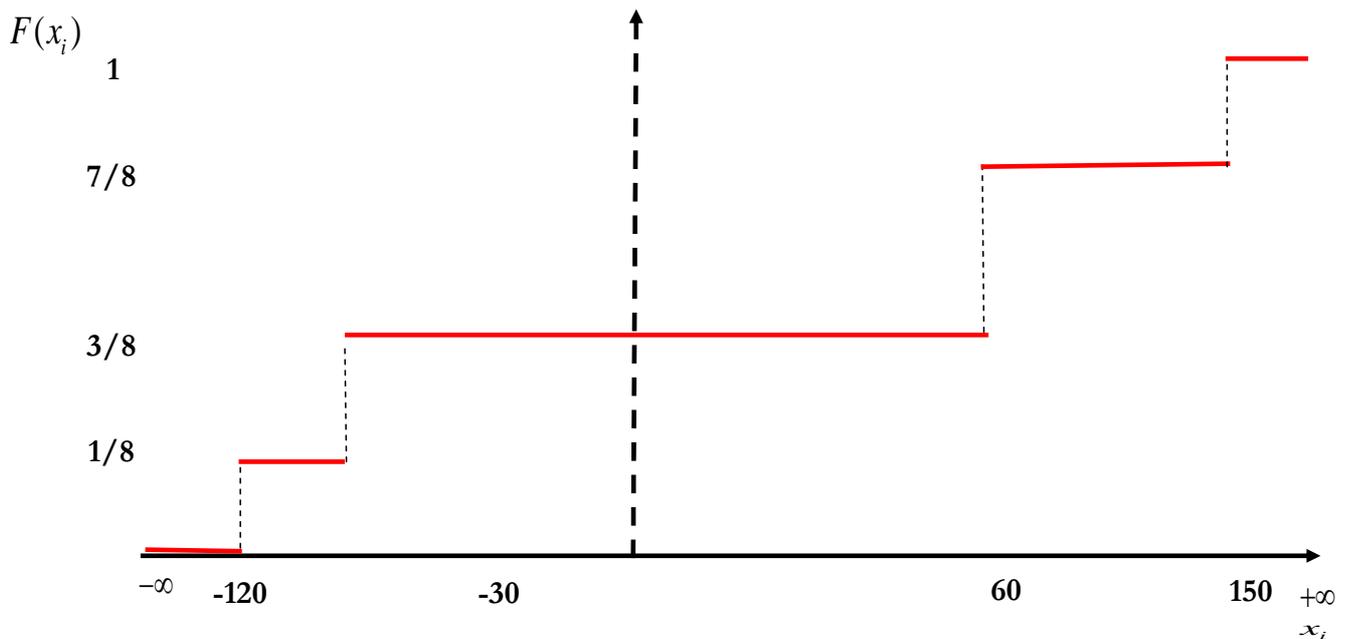
E_i :	(T,T,T)	(T,C,T)	(T,T,C)	(C,T,T)	(T,C,C)	(C,T,C)	(C,C,T)	(C,C,C)
x_i :	-120	-30	-30	-30	+60	-30	+60	+150
$f(x_i)$:	1/8	1/8	1/8	1/8	1/8	1/8	1/8	1/8

La v.c. relativa ai risultati del gioco sarà:

x_i :	-120	-30	+60	+150
$f(x_i)$:	1/8	4/8	2/8	1/8
$F(x_i)$:	1/8	5/8	7/8	1

Rappresentiamo graficamente la funzione di probabilità e la funzione di ripartizione





b) Calcolare il valore atteso e la varianza della variabile casuale definita al punto a).

$$E(X) = \sum_{i=1}^k x_i f(x_i) = (-120) \cdot 1/8 + (-30) \cdot 4/8 + 60 \cdot 2/8 + 150 \cdot 1/8 = 3.75$$

$$\begin{aligned} \text{Var}(X) &= E(X^2) - [E(X)]^2 = \sum_{i=1}^k x_i^2 f(x_i) - 3.75^2 = \\ &= (-120)^2 \cdot 1/8 + (-30)^2 \cdot 4/8 + 60^2 \cdot 2/8 + 150^2 \cdot 1/8 - 3.75^2 = 5962.5 - 14.0625 = 5948.4375 \end{aligned}$$

c) Calcolare la probabilità di vincere 30 Euro effettuando due prove.

L'evento vincita di 30 Euro dopo due prove si verifica nel caso in cui si vincono 60 Euro nella prima prova e se ne perdono 30 nella seconda, oppure nel caso inverso (-30 Euro nella prima prova e +60 Euro nella seconda). Si definiscono gli eventi:

E_1^{+60} : vincita di 30 Euro nella prima prova;

E_1^{-30} : perdita di 30 Euro nella prima prova;

E_2^{+60} : vincita di 60 Euro nella seconda prova;

E_2^{-30} : perdita di 30 Euro nella seconda prova.

La probabilità di vincere 30 Euro dopo due prove è:

$$P[(E_1^{+60} \cup E_2^{-30}) \cup (E_1^{-30} \cup E_2^{+60})] = 2/8 \cdot 4/8 + 4/8 \cdot 2/8 = 0.25$$

Esercizio 3

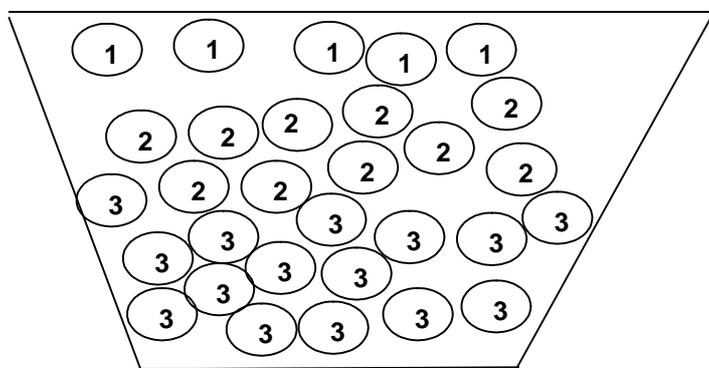
Sia data un'urna contenente 30 palline identiche a meno del fatto che cinque sono identificate dal valore 1, dieci identificate dal valore 2 e quindici dal valore 3.

- Calcolare la probabilità di estrarre con reintroduzione, due palline con lo stesso numero;
- Calcolare la probabilità di estrarre con reintroduzione, due palline la cui somma dei punteggi è due;
- Costruire la variabile casuale per la somma dei numeri presenti sulle facce delle due palline nel caso di estrazione di due palline con reintroduzione e calcolarne il valore atteso e la varianza.

SVOLGIMENTO

a) Calcolare la probabilità di estrarre con reintroduzione, due palline con lo stesso numero;

La composizione dell'urna può essere rappresentata nella figura seguente:



L'evento "estrazione di due palline con lo stesso numero" si verifica se nelle due estrazioni si estraggono due palline contrassegnate dal numero 1 oppure due palline contrassegnate dal numero 2 oppure due palline contrassegnate dal numero 3. Definiamo gli eventi elementari:

E_1 : estrazione di una pallina contrassegnata dal numero 1;

E_2 : estrazione di una pallina contrassegnata dal numero 2;

E_3 : estrazione di una pallina contrassegnata dal numero 3.

Poiché lo schema di estrazione è con reintroduzione, le singole estrazioni sono da considerarsi tra loro indipendenti, per cui la probabilità richiesta può essere calcolata come unione di 3 eventi composti relativi all'estrazione di due palline contrassegnate rispettivamente dai numeri 1, 2 e 3.

$$\begin{aligned} P[(E_1 \cap E_1) \cup (E_2 \cap E_2) \cup (E_3 \cap E_3)] &= P(E_1)P(E_1) + P(E_2)P(E_2) + P(E_3)P(E_3) = \\ &= \left(\frac{5}{30}\right)^2 + \left(\frac{10}{30}\right)^2 + \left(\frac{15}{30}\right)^2 = 0.3\bar{9} \end{aligned}$$

b) Calcolare la probabilità di estrarre con reintroduzione, due palline la cui somma dei punteggi è due;

L'evento "estrazione di due palline la cui somma dei punteggi è due" si verifica se in ognuna delle due estrazioni si estrae una pallina contrassegnata dalla faccia 1, per cui la probabilità richiesta è:

$$P(E_1 \cap E_1) = P(E_1)P(E_1) = \left(\frac{5}{30}\right)^2 = 0.2\bar{7}$$

c) Costruire la variabile casuale per la somma dei numeri presenti sulle facce delle due palline nel caso di estrazione di due palline con reintroduzione e calcolarne il valore atteso e la varianza.

Per costruire la variabile casuale che rappresenta i risultati del gioco bisogna dapprima considerare tutti i possibili risultati del gioco, e quindi lo spazio campionario.

$$S = \left\{ \begin{array}{lll} (E_1 \cap E_1) & (E_1 \cap E_2) & (E_1 \cap E_3) \\ (E_2 \cap E_1) & (E_2 \cap E_2) & (E_2 \cap E_3) \\ (E_3 \cap E_1) & (E_3 \cap E_2) & (E_3 \cap E_3) \end{array} \right\}$$

Associamo ad ogni evento dello spazio campionario il risultato dell'esperimento e la relativa probabilità:

E_i	x_i	$f(x_i)$
$(E_1 \cap E_1)$	2	$\left(\frac{5}{30}\right)^2 = 0.02\bar{7}$
$(E_1 \cap E_2)$	3	$\left(\frac{5}{30}\right)\left(\frac{10}{30}\right) = 0.05\bar{5}$
$(E_1 \cap E_3)$	4	$\left(\frac{5}{30}\right)\left(\frac{15}{30}\right) = 0.08\bar{3}$
$(E_2 \cap E_1)$	3	$\left(\frac{10}{30}\right)\left(\frac{5}{30}\right) = 0.05\bar{5}$
$(E_2 \cap E_2)$	4	$\left(\frac{10}{30}\right)^2 = 0.11\bar{1}$
$(E_2 \cap E_3)$	5	$\left(\frac{10}{30}\right)\left(\frac{15}{30}\right) = 0.16\bar{6}$
$(E_3 \cap E_1)$	4	$\left(\frac{15}{30}\right)\left(\frac{5}{30}\right) = 0.08\bar{3}$
$(E_3 \cap E_2)$	5	$\left(\frac{15}{30}\right)\left(\frac{10}{30}\right) = 0.16\bar{6}$
$(E_3 \cap E_3)$	6	$\left(\frac{15}{30}\right)^2 = 0.25$

La v.c. relativa ai risultati del gioco sarà:

x_i :	2	3	4	5	6
$f(x_i)$:	0.03	0.11	0.27	0.34	0.25
$F(x_i)$:	0.03	0.14	0.41	0.75	1.00

Calcolo del valore atteso e della varianza:

$$E(X) = \sum_{i=1}^k x_i f(x_i) = 2 \cdot 0.03 + 3 \cdot 0.11 + 4 \cdot 0.27 + 5 \cdot 0.34 + 6 \cdot 0.25 = 4.67$$

$$\begin{aligned} \text{Var}(X) &= E(X^2) - [E(X)]^2 = \sum_{i=1}^k x_i^2 f(x_i) - 4.67^2 = \\ &= 2^2 \cdot 0.03 + 3^2 \cdot 0.11 + 4^2 \cdot 0.27 + 5^2 \cdot 0.34 + 6^2 \cdot 0.25 - 4.67^2 = \\ &= 22.84 - 21.7156 = 1.1244 \end{aligned}$$