Università degli Studi di Cassino, Anno accademico 2004-2005
Corso di Statistica 2, Prof. M. Furno

Esercitazione del 18/1/2005
Dott. Claudio Conversano

Esercizio 1 *(non svolto in aula)*
Vengono lanciati 2 dadi, uno rosso e uno blu. Si calcoli la probabilità di:

a) un 3 in ambedue i dadi
b) un 3 in un dado, 5 nell'altro
c) un totale di 3
d) un totale di 6
e) un totale di 6 o 9
f) un "doppio" (stesso valore in entrambi i dadi)
g) un totale di almeno 9

SVOLGIMENTO

a) un 3 in ambedue i dadi

Si definiscono gli eventi:
E_1 = "uscita della faccia 3 dal dado rosso"
E_2 = "uscita della faccia 3 dal dado blu"

La probabilità di ottenere un 3 da ambedue i dadi è data dall'intersezione dei due eventi elementari E_1 ed E_2. Essendo i lanci dei due dadi tra loro indipendenti, la probabilità richiesta è:

$$P\left(E_1 \cap E_2\right) = P(E_1)P(E_2) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = 0.02\overline{7}$$

b) un 3 in un dado, 5 nell'altro

Si definiscono gli eventi:
E_1 = "uscita della faccia 3 dal dado rosso"
E_2 = "uscita della faccia 3 dal dado blu"
E_3 = "uscita della faccia 5 dal dado rosso"
E_4 = "uscita della faccia 5 dal dado blu"

La probabilità di ottenere un 3 in un dado ed un 5 nell'altro è data dall'unione dei due eventi composti $\left(E_1 \cap E_3\right)$ ed $\left(E_2 \cap E_4\right)$. Essendo questi due ultimi eventi tra loro incompatibili, la probabilità richiesta è:

$$P\left[\left(E_1 \cap E_3\right) \cup \left(E_2 \cap E_4\right)\right] = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{2}{36} = 0.05\overline{5}$$

c) un totale di 3

Per risolvere questo quesito bisogna definire lo spazio campionario associato all'esperimento "somma delle facce di due dadi". Esso risulta:

$$S=\begin{Bmatrix} (1,1) & (1,2) & (1,3) & (1,4) & (1,5) & (1,6) \\ (2,1) & (2,2) & (2,3) & (2,4) & (2,5) & (2,6) \\ (3,1) & (3,2) & (3,3) & (3,4) & (3,5) & (3,6) \\ (4,1) & (4,2) & (4,3) & (4,4) & (4,5) & (4,6) \\ (5,1) & (5,2) & (5,3) & (5,4) & (5,5) & (5,6) \\ (6,1) & (6,2) & (6,3) & (6,4) & (6,5) & (6,6) \end{Bmatrix}$$

Sia E l'evento "la somma delle due facce è uguale a 3". La probabilità richiesta è:

$$P(E)=\frac{2}{36}=0.05\overline{5}$$

d) un totale di 6

Per risolvere questo quesito bisogna definire lo spazio campionario associato all'esperimento "somma delle facce di due dadi". Esso risulta:

$$S=\begin{Bmatrix} (1,1) & (1,2) & (1,3) & (1,4) & (1,5) & (1,6) \\ (2,1) & (2,2) & (2,3) & (2,4) & (2,5) & (2,6) \\ (3,1) & (3,2) & (3,3) & (3,4) & (3,5) & (3,6) \\ (4,1) & (4,2) & (4,3) & (4,4) & (4,5) & (4,6) \\ (5,1) & (5,2) & (5,3) & (5,4) & (5,5) & (5,6) \\ (6,1) & (6,2) & (6,3) & (6,4) & (6,5) & (6,6) \end{Bmatrix}$$

Sia E l'evento "la somma delle due facce è uguale a 6". La probabilità richiesta è:

$$P(E)=\frac{5}{36}=0.13\overline{8}$$

e) un totale di 6 o 9

Per risolvere questo quesito bisogna definire lo spazio campionario associato all'esperimento "somma delle facce di due dadi". Esso risulta:

$$S=\begin{Bmatrix} (1,1) & (1,2) & (1,3) & (1,4) & (1,5) & (1,6) \\ (2,1) & (2,2) & (2,3) & (2,4) & (2,5) & (2,6) \\ (3,1) & (3,2) & (3,3) & (3,4) & (3,5) & (3,6) \\ (4,1) & (4,2) & (4,3) & (4,4) & (4,5) & (4,6) \\ (5,1) & (5,2) & (5,3) & (5,4) & (5,5) & (5,6) \\ (6,1) & (6,2) & (6,3) & (6,4) & (6,5) & (6,6) \end{Bmatrix}$$

Siano E_1 l'evento "la somma delle due facce è uguale a 6" ed E_2 l'evento "la somma delle due facce è uguale a 9". La probabilità richiesta è data dall'unione dei due eventi incompatibili E_1 ed E_2:

$$P(E_1 \cup E_2) = \frac{5}{36} + \frac{4}{36} = \frac{9}{36} = 0.25$$

f) un "doppio" (stesso valore in entrambi i dadi)

Per risolvere questo quesito bisogna definire lo spazio campionario associato all'esperimento "somma delle facce di due dadi". Esso risulta:

$$S=\begin{Bmatrix} (1,1) & (1,2) & (1,3) & (1,4) & (1,5) & (1,6) \\ (2,1) & (2,2) & (2,3) & (2,4) & (2,5) & (2,6) \\ (3,1) & (3,2) & (3,3) & (3,4) & (3,5) & (3,6) \\ (4,1) & (4,2) & (4,3) & (4,4) & (4,5) & (4,6) \\ (5,1) & (5,2) & (5,3) & (5,4) & (5,5) & (5,6) \\ (6,1) & (6,2) & (6,3) & (6,4) & (6,5) & (6,6) \end{Bmatrix}$$

Sia E l'evento "le facce dei due dadi sono uguali". La probabilità richiesta è:

$$P(E) = \frac{6}{36} = 0.16\overline{6}$$

g) un totale di almeno 9

Per risolvere questo quesito bisogna definire lo spazio campionario associato all'esperimento "somma delle facce di due dadi". Esso risulta:

$$S=\begin{Bmatrix} (1,1) & (1,2) & (1,3) & (1,4) & (1,5) & (1,6) \\ (2,1) & (2,2) & (2,3) & (2,4) & (2,5) & (2,6) \\ (3,1) & (3,2) & (3,3) & (3,4) & (3,5) & (3,6) \\ (4,1) & (4,2) & (4,3) & (4,4) & (4,5) & (4,6) \\ (5,1) & (5,2) & (5,3) & (5,4) & (5,5) & (5,6) \\ (6,1) & (6,2) & (6,3) & (6,4) & (6,5) & (6,6) \end{Bmatrix}$$

Sia E l'evento "la somma delle due facce è maggiore o uguale a 9". La probabilità richiesta è:

$$P(E) = \frac{10}{36} = 0.27\overline{7}$$

Esercizio 2

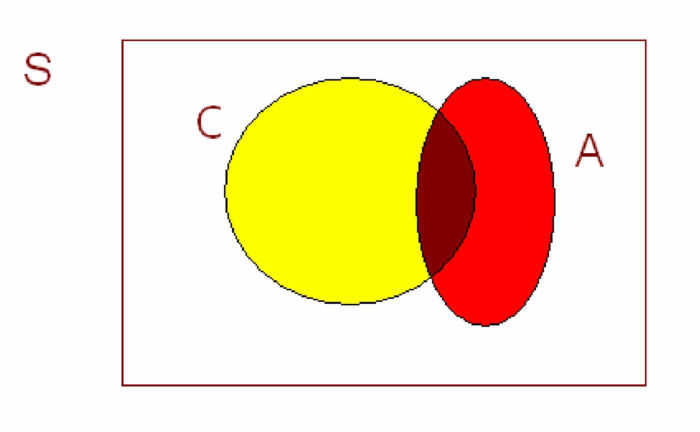
Nel 1990 la popolazione italiana era così composta: 10% della Campania, 6% di origine albanese, 2% campani di origine albanese. Se fosse estratto a caso un cittadino italiano, con quale probabilità è:

a) della Campania o di origine albanese
b) né della Campania né di origine albanese
c) di origine albanese ma non della Campania.

SVOLGIMENTO

Si definiscono gli eventi:
C = "cittadino campano"
A = "cittadino di origine albanese"
$(C \cap A)$ = "cittadino campano di origine albanese"

Lo spazio campionario associato a questo esperimento può essere così rappresentato:



Dai dati risulta:

$P(C) = 0.1$; $P(A) = 0.06$; $P(C \cap A) = 0.02$

a) della Campania o di origine albanese

Bisogna calcolare l'unione dei due eventi compatibili C ed A:

$P(C \cup A) = P(A) + P(C) - P(A \cap C) = 0.10 + 0.06 - 0.02 = 0.14$

b) né della Campania né di origine albanese

La probabilità richiesta è: $1 - P(C \cup A) = 1 - 0.14 = 0.86$

c) di origine albanese ma non della Campania.

Bisogna sottrarre da P(C) la probabilità dell'intersezione dei due eventi. La probabilità richiesta è:

$P(C) - P(C \cap A) = 0.06 - 0.02 = 0.04$

Esercizio 3

La tavola seguente mostra 115,5 milioni di unità della forza di lavoro dell'Italia per zona di residenza e condizione professionale:

Condizione professionale	Zona di Residenza			
	Nord	Centro	Sud e Isole	Totale
Occupato	20,4	46,4	40,4	107,2
Disoccupato	3,2	1,5	3,6	8,3
Totale	23,6	47,9	44,0	115,5

Se viene estratto un individuo delle forze lavoro a caso,

a) trovare la probabilità che sia occupato
b) restringendo l'estrazione alla popolazione dei residenti al nord, trovare la probabilità che sia occupato
c) l'evento "disoccupato" è indipendente dall'evento "residente al nord"?

SVOLGIMENTO

a) trovare la probabilità che sia occupato

Sia O l'evento "un cittadino è occupato". La probabilità richiesta è:

$$P(O) = \frac{107.2}{115.5} = 0.928$$

b) restringendo l'estrazione alla popolazione dei residenti al nord, trovare la probabilità che sia occupato

Sia N l'evento "un cittadino è residente al nord". La probabilità richiesta è $P(O|N)$. Gli eventi sono da considerarsi dipendenti (almeno una frequenza congiunta è diversa dalla corrispondente frequenza teorica), per cui risulta:

$$P(O|N) = \frac{P(N \cap O)}{P(N)} = \frac{20.4}{115.5} \Big/ \frac{23.6}{115.5} = \frac{20.4}{23.6} = 0.864$$

Tale probabilità corrisponde alla frequenza condizionata della modalità "occupato" rispetto ai cittadini residenti al nord.

c) l'evento "disoccupato" è indipendente dall'evento "residente al nord"?

Sia D l'evento "un cittadino è disoccupato". Nell'ipotesi di indipendenza dovrebbe aversi:

$$P(D \cap N) = P(D)P(N)$$

$$P(D \cap N) = \frac{3.2}{115.5} = 0.028$$

$$P(D)P(N) = \frac{8.3}{115.5}\frac{23.6}{115.5} = 0.015 \neq 0.28$$ → non esiste indipendenza tra i due eventi considerati.

Esercizio 4 *(non svolto in aula)*

Una particolare forma di cancro si verifica su 3 persone ogni 1000. Per diagnosticarla è stato sviluppato uno screening test che sbaglia raramente. Fra i pazienti sani, solo il 5% ha una reazione positiva (falso allarme). Tra i pazienti malati, solo il 2% ha una reazione negativa (mancato allarme). Con quale probabilità una persona alla quale è stato diagnosticata la malattia è effettivamente malata?

SVOLGIMENTO

Si definiscono gli eventi:
S = "lo screening test da esito positivo"
C = "il paziente è malato di cancro"

Dai dati a disposizione risulta:

- Probabilità che lo screening test risulti positivo per pazienti sani: $P\left(S \mid \bar{M}\right) = 0.05$;
- Probabilità che lo screening test risulti negativo per pazienti malati: $P\left(\bar{S} \mid M\right) = 0.02$.

Inoltre, sapendo che su 1.000 persone 3 sono malate è possibile costruire la tabella seguente tenendo conto delle probabilità $P\left(S \mid \bar{M}\right)$ e $P\left(\bar{S} \mid M\right)$ (in rosso sono riportati i dati rilevati dal testo dell'esercizio).

	M	$\bar{M}$	Totale
S	2.94	20 **(0.05)**	22.94
$\bar{S}$	0.06 **(0.02)**	977	977.06
Totale	**3**	997	**1.000**

La probabilità richiesta è $P\left(S \mid M\right)$. I due eventi sono dipendenti, per cui risulta:

$$P\left(S \mid M\right) = \frac{P\left(S \cap M\right)}{P(M)} = \frac{2.94/1000}{3/1000} = \frac{2.94}{3} = 0.98$$

Esercizio 5

Si supponga che A e B siano eventi indipendenti, con $P(A)=0.4$ e $P(B)=0.3$. Calcolare:

a) $P(A|B)$

b) $P(A\cap B)$

c) $P(A\cup B)$

Svolgere gli stessi punti nel caso in cui A e B sono invece incompatibili.

SVOLGIMENTO

EVENTI INDIPENDENTI

a) $P(A|B)$

Poiché i due eventi sono indipendenti risulta: $P(A|B)=P(A)=0.4$

b) $P(A\cap B)$

Poiché due eventi indipendenti risulta: $P(A\cap B)=P(A)P(B)=0.4\cdot 0.3=0.12$

c) $P(A\cup B)$

Poiché due eventi indipendenti sono compatibili, risulta:
$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=0.4+0.3-0.12=0.58$

EVENTI INCOMPATIBILI

a) $P(A|B)$

Poiché due eventi incompatibili sono necessariamente indipendenti risulta: $P(A|B)=P(A)=0.4$

b) $P(A\cap B)$

Poiché i due eventi indipendenti sono incompatibili, risulta: $P(A\cap B)=\varnothing$

c) $P(A\cup B)$

Poiché i due eventi sono incompatibili, risulta: $P(A\cup B)=P(A)+P(B)=0.4+0.3=0.70$

Esercizio 6

Per ridurre i furti all'interno di un'azienda, i dipendenti vengono sottoposti a una macchina della verità, che rivela correttamente il comportamento dei dipendenti nel 90% dei casi (sia per i dipendenti colpevoli che per quelli innocenti). I dipendenti che la macchina dichiara colpevoli vengono licenziati. Si supponga che il 5% dei dipendenti abbia commesso almeno un furto.

a) Quale frazione dei dipendenti licenziati è effettivamente innocente?
b) Fra i dipendenti non licenziati, quale frazione ha commesso dei furti?

SVOLGIMENTO

a) Quale frazione dei dipendenti licenziati è effettivamente innocente?

Si definiscono gli eventi:
C = "la macchina della verità funziona correttamente"
F = "il dipendente ha commesso almeno un furto"

e le probabilità: $P(C) = 0.9$; $P(F) = 0.05$.

Sia L l'evento "il dipendente è stato licenziato". La probabilità del verificarsi di tale evento si ottiene considerando l'unione dei due eventi incompatibili $(C \cap F)$ e $(\bar{C} \cap \bar{F})$, per cui risulta:

$$P(L) = P\left[(C \cap F) \cup (\bar{C} \cap \bar{F})\right] = P(C)P(F) + P(\bar{C})P(\bar{F}) = 0.9 \cdot 0.05 + 0.1 \cdot 0.95 = 0.045 \cdot 0.095 = 0.14$$

La probabilità richiesta (frazione dei dipendenti licenziati effettivamente innocente) è definita dal rapporto $\frac{P(\bar{C} \cap \bar{F})}{P(L)}$ (frazione dei dipendenti licenziati dato che la macchina della verità non ha funzionato correttamente perché li ha dichiarati colpevoli nonostante non avessero commesso alcun furto), per cui risulta pari a:

$$\frac{P(\bar{C} \cap \bar{F})}{P(L)} = \frac{0.095}{0.14} = 0.68$$

b) Fra i dipendenti non licenziati, quale frazione ha commesso dei furti?

La probabilità richiesta (frazione dei dipendenti non licenziati che ha commesso dei furti) è definita dal rapporto $\frac{P(\bar{C} \cap F)}{P(\bar{L})}$ (frazione dei dipendenti non licenziati dato che la macchina della verità non ha funzionato correttamente perché li ha dichiarati innocenti nonostante avessero commesso almeno un furto), per cui risulta pari a:

$$\frac{P(\bar{C} \cap F)}{P(\bar{L})} = \frac{P(\bar{C})P(F)}{P(\bar{L})} = \frac{0.1 \cdot 0.05}{0.86} = 0.006$$

Esercizio 7

Un'indagine nazionale ha mostrato che il 30% delle mogli in una coppia guarda un certo tipo di programma TV. Lo stesso programma è visto dal 50% dei mariti. Infine, se una moglie guarda il programma, la probabilità che il programma sia visto anche dal marito cresce al 60%. Se viene estratta una coppia a caso, qual è la probabilità che:

a) la coppia guardi il programma
b) almeno uno della coppia guardi il programma
c) nessuno dei due guarda il programma
d) se il marito guarda il programma, anche la moglie lo guarda

SVOLGIMENTO

a) la coppia guardi il programma

Si definiscono gli eventi:
F = "la moglie guarda il programma TV"
M = "il marito guarda il programma TV"

e le probabilità: $P(F)=0.3$; $P(M)=0.5$; $P(M\,|\,F)=0.6$.

La probabilità richiesta è ottenuta considerando l'intersezione dei due eventi dipendenti F ed M. Essa risulta:

$$P(F\cap M)=P(M\,|\,F)P(F)=0.6\cdot 0.3=0.18$$

b) almeno uno della coppia guardi il programma

Si definisca l'evento: E_1 = "almeno uno della coppia guarda il programma". La probabilità richiesta è ottenuta considerando l'unione dei due eventi compatibili F ed M. Essa risulta:

$$P(E_1)=P(F\cup M)=P(M)+P(F)-P(M\cap F)=0.3+0.5-0.18=0.62$$

c) nessuno dei due guarda il programma

Si definisca l'evento: E_2 = "nessuno dei due guarda il programma". La probabilità richiesta è ottenuta considerando la negazione dell'evento $(F\cup M)$. Essa risulta:

$$P(E_2)=P(\bar{F}\cap\bar{M})=1-\left[P(M)+P(F)-P(M\cap F)\right]=1-0.62=0.38$$

d) se il marito guarda il programma, anche la moglie lo guarda

Si definisca l'evento: E_3 = "la moglie guarda il programma dato che lo guarda anche il marito". La probabilità richiesta è un probabilità condizionata per eventi dipendenti. Essa risulta:

$$P(E_3)=P(F\,|\,M)=\frac{P(M\cap F)}{P(M)}=\frac{0.18}{0.5}=0.36$$

Esercizio 8 *(non svolto in aula)*
Tre macchine, A, B, C, producono rispettivamente il 25%, il 35% e il 40% dei bulloni prodotti da una certa fabbrica. Sul totale dei bulloni prodotti dalle tre macchine risultano difettosi il 5%, il 4% e il 2%, rispettivamente. Viene scelto un bullone a caso e viene trovato difettoso. Qual è la probabilità che esso provenga dalla macchina B?

SVOLGIMENTO

Indicando con D l'evento "il bullone prodotto è difettoso", e con $P(X)$ la probabilità che il bullone prodotto provenga dalla macchina X, le informazioni fornite dal testo possono essere schematizzate nel seguente modo:

$P(A)=0.25;\quad P(B)=0.35;\quad P(C)=0.4;\quad P(D|A)=0.05;\quad P(D|B)=0.04;\quad P(D|C)=0.02.$

L'evento D, inoltre, può essere scomposto nel seguente modo: $D=(D\cap A)\cup(D\cap B)\cup(D\cap C)$

La probabilità di estrarre un pezzo difettoso è:

$$P(D)=P\left[(D\cap A)\cup(D\cap B)\cup(D\cap C)\right]=P(D\cap A)+P(D\cap B)+P(D\cap C)=$$
$$=P(D|A)P(A)+P(D|B)P(B)+P(D|C)P(C)=$$
$$=0.05\cdot 0.25+0.04\cdot 0.35+0.02\cdot 0.4=0.0345$$

La probabilità richiesta è:

$$P(D|B)=\frac{P(B)P(D|B)}{P(D)}=\frac{0.35\cdot 0.04}{0.0345}=\frac{0.014}{0.0345}=0.406$$