ESERCIZIO 6.1

Si considerino i 20 campioni di ampiezza n = 2 estratti da una popolazione X di N = 5 elementi distribuiti normalmente, con media $\mu = 13{,}6$ e $\sigma^2 = 8{,}33$.

A partire dalle 20 determinazioni della v.c. $\overline{X}$ (media campionaria), si costruisca per ciascun campione l'intervallo di confidenza per la media della popolazione μ al livello di confidenza del 95%.

	$\overline{x}$		$\overline{x}$
1	13	11	14,5
2	12	12	10,5
3	16	13	16
4	14,5	14	15,5
5	13	15	14,5
6	9	16	17
7	15,5	17	14,5
8	11,5	18	11,5
9	12	19	13
10	13	20	16

<u>Soluzione</u>

Gli intervalli di confidenza possono essere ottenuti a partire dalla seguente identità:

$$P\left(\overline{x} - \frac{z_{\alpha/2} \bullet \sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \overline{x} + \frac{z_{\alpha/2} \bullet \sigma}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \alpha$$

da cui si ricava:

$$IC_{1-\alpha} = \left[\overline{x} - \frac{z_{\alpha/2} \bullet \sigma}{\sqrt{n}} ; \overline{x} + \frac{z_{\alpha/2} \bullet \sigma}{\sqrt{n}}\right]$$

Per un livello di significatività del 95% si ha:

$$\alpha/2 = 0.025; \quad z_{0,025} = 1{,}96$$

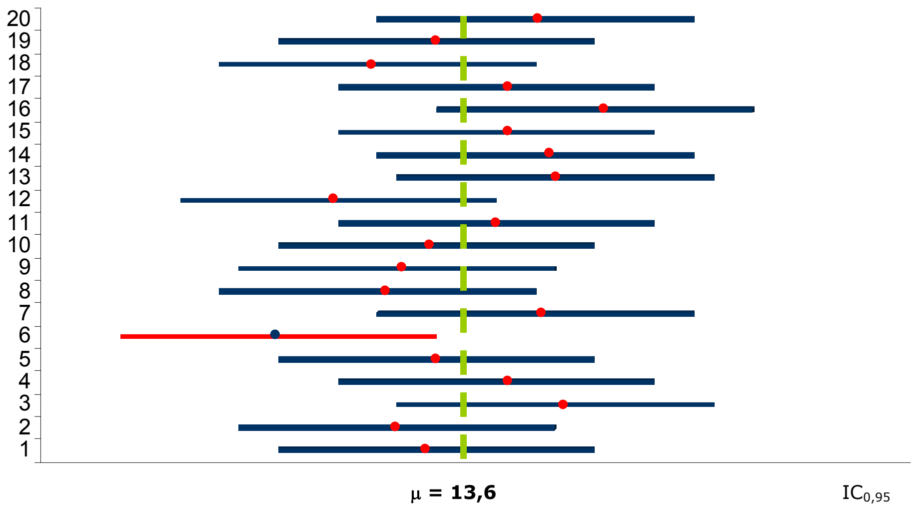
ed essendo $\sigma = \sqrt{8,33} = 2{,}89$, sostituendo si ha:

$$IC_{0,95} = \left[\overline{x} - \frac{1{,}96 * 2{,}89}{\sqrt{2}} ; \overline{x} + \frac{1{,}96 * 2{,}89}{\sqrt{2}}\right] = \left[\overline{x} - 4; \overline{x} + 4\right]$$

Tale intervallo va calcolato per ciascuno dei 20 valori di $\overline{X}$:

	$\bar{x}$	$IC_{0,95}$
1	13	9,00; 17,00
2	12	8,00; 16,00
3	16	12,00; 20,00
4	14,5	10,50; 18,50
5	13	9,00; 17,00
6	9	**5,00; 13,00**
7	15,5	11,50; 19,50
8	11,5	7,50; 15,50
9	12	8,00; 16,00
10	13	9,00; 17,00

	$\bar{x}$	$IC_{0,95}$
11	14,5	10,50; 18,50
12	10,5	6,50; 14,50
13	16	12,00; 20,00
14	15,5	11,50; 19,50
15	14,5	10,50; 18,50
16	17	13,00; 21,00
17	14,5	10,50; 18,50
18	11,5	7,50; 15,50
19	13	9,00; 17,00
20	15,5	11,50; 19,50



Vi è un unico intervallo che non contiene la media della popolazione μ = 13,6 (precisamente quello relativo al 6° campione) che, su un totale di 20 intervalli, ne rappresenta proprio il 5%, ossia una proporzione pari ad α.

ESERCIZIO 6.2

Si vuole stimare la spesa media mensile per spostamenti delle famiglie di un piccolo paese. Un campione di n = 100 famiglie è caratterizzato da una spesa media di 60 euro. Assumendo che la spesa segua una distribuzione Normale con varianza σ^2 = 128, determinare l'intervallo di confidenza per la spesa media di tutte le famiglie del paese per i livelli di confidenza:

a) 90%;
b) 95%.

<u>Soluzione</u>

<u>Popolazione Normale, varianza nota.</u>

$$X \sim N(\mu, 128)$$

Quindi l'intervallo di confidenza è determinato a partire dalla seguente relazione:

$$P\left(\bar{x} - \frac{z_{\alpha/2} \bullet \sigma}{\sqrt{n}} \le \mu \le \bar{x} + \frac{z_{\alpha/2} \bullet \sigma}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \alpha$$

in cui $\bar{x} = 60$.

a)
α = 0,10
$\alpha/2$ = 0.05
$z_{0,05}$ = 1,65

$$P\left(60 - \frac{1,65 \times 11,31}{\sqrt{100}} \le \mu \le 60 + \frac{1,65 \times 11,31}{\sqrt{100}}\right) = 0,9$$

L'intervallo di confidenza al 90% per la media μ è, dunque:

$$IC_{0,9} = \left[60 - 1,86; 60 + 1,86\right] = \left[58,139; 61,86\right]$$

b)
α = 0,05
$\alpha/2$ = 0.025
$z_{0,025}$ = 1,96

$$P\left(60 - \frac{1,96 \times 11,31}{\sqrt{100}} \le \mu \le 60 + \frac{1,96 \times 11,31}{\sqrt{100}}\right) = 0,95$$

da cui l'intervallo di confidenza al 95%:

$$IC_{0,95} = \left[60 - 2,2; 60 + 2,2\right] = \left[57,8; 62,2\right]$$

ESERCIZIO 6.3

Si vuole stimare la velocità media delle auto che transitano di notte su una strada statale. Attraverso un autovelox si rileva un campione di n = 25 auto la cui velocità media è $\bar{x} = 120$ Km orari.

Supponendo che la velocità segua una popolazione Normale con media μ e scarto quadratico medio σ = 30, si determini l'intervallo di confidenza al 99% per la velocità media incognita μ.

<u>Soluzione</u>

<u>Popolazione Normale, varianza nota.</u>

$$X \sim N(\mu, 900)$$

con $\bar{x} = 120$.

$$P\left(\bar{x} - \frac{z_{\alpha/2} \bullet \sigma}{\sqrt{n}} \le \mu \le \bar{x} + \frac{z_{\alpha/2} \bullet \sigma}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \alpha$$

α = 0,01

$\alpha/2$ = 0.005

$z_{0,005}$ = 2,58

$$P\left(120 - \frac{2,58 \times 30}{\sqrt{25}} \le \mu \le 120 + \frac{2,58 \times 30}{\sqrt{25}}\right) = 0,99$$

da cui l'intervallo di confidenza al 99%:

$$IC_{0,99} = [120 - 15,5; 120 + 15,5] = [104,5; 135,5].$$

ESERCIZIO 6.4

Un campione casuale di n = 9 unità estratto da una popolazione Normale ha una media $\bar{x} = 120$ ed una varianza campionaria corretta $\hat{s}^2 = 900$.

a) determinare l'intervallo di confidenza al 99% per la media della popolazione;
b) determinare l'intervallo nell'ipotesi che il campione sia di 25 unità;
c) determinare l'intervallo nell'ipotesi che il campione sia di 100 unità.

<u>Soluzione</u>

a)
<u>Popolazione Normale, varianza non nota.</u>

$$X \sim N(\mu, \sigma^2)$$

con $\bar{x} = 120$.

$$P\left(\bar{x} - \frac{t_{\alpha/2,n-1} \bullet \hat{s}}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{x} + \frac{t_{\alpha/2,n-1} \bullet \hat{s}}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \alpha$$

$\alpha = 0{,}01$
$\alpha/2 = 0.005$
$n = 9$
$t_{0,005,8} = 3{,}3555$

$$P\left(120 - \frac{3{,}3555 \times 30}{\sqrt{9}} \leq \mu \leq 120 + \frac{3{,}3555 \times 30}{\sqrt{9}}\right) = 0{,}99$$

da cui l'intervallo di confidenza al 99%:

$$IC_{0,99} = \left[120 - 33{,}55; 120 + 33{,}55\right] = \left[86{,}45; 153{,}55\right].$$

b)
<u>Popolazione Normale, n < 30, varianza non nota.</u>

$\alpha = 0{,}01$
$\alpha/2 = 0.005$
$n = 25$
$t_{0,005,24} = 2{,}7969$

$$P\left(120 - \frac{2{,}7969 \times 30}{\sqrt{25}} \leq \mu \leq 120 + \frac{2{,}7969 \times 30}{\sqrt{25}}\right) = 0{,}99$$

da cui l'intervallo di confidenza al 99%:

$$IC_{0,99} = \left[120 - 16{,}8; 120 + 16{,}8\right] = \left[103{,}2; 136{,}8\right].$$

c)
Popolazione Normale, n > 30, varianza non nota.

$\alpha = 0{,}01$
$\alpha/2 = 0.005$
$n = 100$
$t_{0,005,99} = 2{,}6264$

$$P\left(120 - \frac{2{,}6264 \times 30}{\sqrt{100}} \leq \mu \leq 120 + \frac{2{,}6264 \times 30}{\sqrt{100}}\right) = 0{,}99$$

da cui l'intervallo di confidenza al 99%:

$$IC_{0,99} = \left[120 - 7{,}88; 120 + 7{,}88\right] = \left[112{,}12; 127{,}88\right].$$

In alternativa, dal momento che la distribuzione t di Student all'aumentare del numero di gradi di libertà tende ad assomigliare sempre più ad una Normale, essendo il campione abbastanza ampio (n > 30) è possibile utilizzare anche la Normale standardizzata:

$$P\left(\bar{x} - \frac{z_{\alpha/2} \bullet \hat{s}}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{x} + \frac{z_{\alpha/2} \bullet \hat{s}}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \alpha$$

$z_{0,005} = 2{,}58$

$$P\left(120 - \frac{2{,}58 \times 30}{\sqrt{100}} \leq \mu \leq 120 + \frac{2{,}58 \times 30}{\sqrt{100}}\right) = 0{,}99$$

da cui l'intervallo di confidenza al 99%:

$$IC_{0,99} = \left[120 - 7{,}74; 120 + 7{,}74\right] = \left[112{,}26; 127{,}74\right].$$

Come si può vedere, i due intervalli possono essere considerati con buona approssimazione equivalenti.

ESERCIZIO 6.5

Si voglia stimare la spesa media mensile per divertimenti del piccolo paese di prima, attraverso un campione di n = 64 famiglie estratto da una popolazione non nota e caratterizzato da una spesa media $\bar{x}$ di 45 euro. Assumendo che lo scarto quadratico medio σ sia 16, determinare l'intervallo di confidenza per la spesa media di tutte le famiglie per i livelli di confidenza del:

a) 90%;

b) 95%.

<u>Soluzione</u>

<u>Popolazione non specificata, n > 30, varianza nota.</u>

Essendo la numerosità campionaria sufficientemente elevata (n > 30), il teorema del limite centrale ci autorizza a trattare la v.c. "$\bar{X}$ = spesa media per divertimenti" come una Normale, con media $\mu_{\bar{x}} = \mu$ e varianza $\sigma^2_{\bar{x}} = \frac{\sigma^2}{n} = \frac{256}{64} = 4$.

a)

α = 0,10

$\alpha/2$ = 0.05

$z_{0,05}$ = 1,645

$$P\left(45 - \frac{1,645 \times 2}{\sqrt{64}} \leq \mu \leq 45 + \frac{1,645 \times 2}{\sqrt{64}}\right) = 0,9$$

L'intervallo di confidenza al 90% per la media μ è, dunque:

$$IC_{0,9} = \left[45 - 0,4; 45 + 0,4\right] = \left[44,6; 45,4\right]$$

b)

α = 0,05

$\alpha/2$ = 0.025

$z_{0,025}$ = 1,96

$$P\left(45 - \frac{1,96 \times 2}{\sqrt{64}} \leq \mu \leq 45 + \frac{1,96 \times 2}{\sqrt{64}}\right) = 0,95$$

da cui l'intervallo di confidenza al 95%:

$$IC_{0,95} = \left[45 - 0,49; 45 + 0,49\right] = \left[44,51; 45,49\right]$$

ESERCIZIO 6.6

Un processo automatico di produzione è caratterizzato da una varianza pari a 1,44.

a) Qual è la probabilità di avere una divergenza dalla media di 0,25 in un campione di 100 unità?

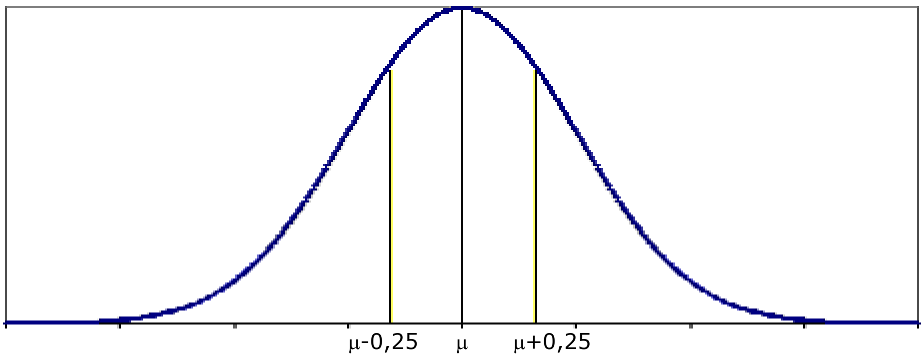
b) Quanto deve essere ampio il campione se per tale errore si ammette un rischio pari al 5%?

Soluzione

a)

La probabilità di commettere un errore e = 0,25 intorno alla media equivale alla probabilità associata ad un intervallo di ampiezza 2 × 0,25 = 0,5 centrato sulla media:

$$\mu \pm \overline{x} = 2 * 0{,}25 = 0{,}5$$



Tale probabilità può essere calcolata attraverso la v.c. $Z = \dfrac{\overline{X} - \mu}{\sigma_{\overline{X}} / \sqrt{n}}$, ossia come probabilità che Z sia esterna all'intervallo [μ - 0,25; μ + 0,25]. In pratica, se:

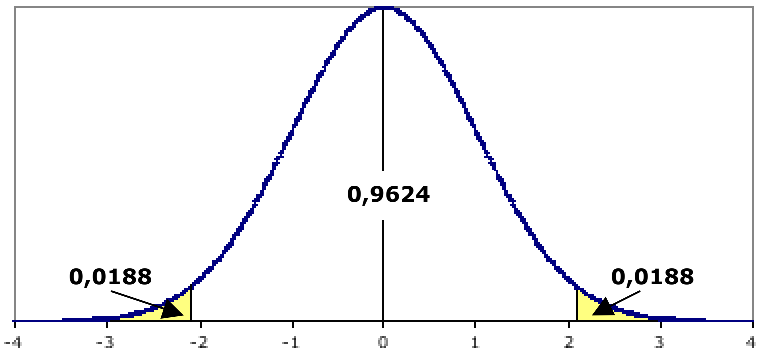
$$P\left(-z_{\alpha/2} \le \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma_{\overline{X}} / \sqrt{n}} \le z_{\alpha/2} \right) = 1 - \alpha$$

allora:

$$\alpha = P\left(z_{\alpha/2} > \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma_{\overline{X}} / \sqrt{n}} \right) + P\left(-z_{\alpha/2} < \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma_{\overline{X}} / \sqrt{n}} \right) = 2 * P\left(z_{\alpha/2} > \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma_{\overline{X}} / \sqrt{n}} \right)$$

quindi, sostituendo:

$$\alpha = 2 * P\left(z > \frac{0,25}{\frac{1,2}{10}}\right) = 2 * P(z > 2,08) = 2 * 0,0188 = 0,0376$$



b)
Rispetto al caso precedente, ora α è noto ed è pari a 0,05 (quindi $\alpha/2$ = 0,025).
Ricordando che:

$$\frac{\alpha}{2} = P\left(z_{\alpha/2} > \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma_{\overline{X}} / \sqrt{n}}\right)$$

Per determinare la numerosità campionaria basta, quindi, sostituire in questa relazione le quantità note e risolvere la disuguaglianza rispetto ad n:

$$P\left(z_{0,025} > \frac{0,25}{1,2/\sqrt{n}}\right) = P\left(1,96 > \frac{0,25}{1,2/\sqrt{n}}\right) = 0,025$$

Bisogna cioè, cercare il valore minimo di n che soddisfa $1,96 > \frac{0,25\sqrt{n}}{1,2}$, ossia:

$$\sqrt{n} > 1,96\frac{1,2}{0,25}$$

e, dunque:

$$n > \left(1,96\frac{1,2}{0,25}\right)^2 = 88,5$$

che suggerisce un valore minimo di n pari a 89 unità.

ESERCIZIO 6.7

Un'azienda vuole stimare la quota di mercato π che occupa il suo prodotto. A tal fine intervista un campione di n = 100 potenziali clienti, di cui il 10% è effettivamente costituito da suoi acquirenti.
a) Determinare un intervallo di confidenza al 99% per la quota di mercato π;
b) qual è la numerosità minima per un errore massimo del 5% ed un rischio di errore del 10%?

Soluzione

a)

L'intervallo di confidenza per la proporzione π è ottenuto da:

$$P\left(p - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \le \pi \le p + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right) = 1-\alpha$$

Considerando che:

$\alpha = 0{,}01$
$\alpha/2 = 0{,}005$
$z_{0,005} = 2{,}58$,

sostituendo le quantità note si ha:

$$P\left(0{,}10 - 2{,}58\sqrt{\frac{0{,}10 \times 0{,}90}{100}} \le \pi \le 0{,}10 + 2{,}58\sqrt{\frac{0{,}10 \times 0{,}90}{100}}\right) = 0{,}99$$

da cui:

$$IC_{0,99} = \left[0{,}10 - 0{,}0774; 0{,}10 + 0{,}0774\right] = \left[0{,}0226; 0{,}1774\right]$$

che, tradotto in termini di quota di mercato diventa:

$$IC_{0,99} = \left[2{,}26\%; 17{,}74\%\right]$$

b)

Le quantità note sono:

$e = 0{,}05$
$\alpha = 0{,}10$
$\alpha/2 = 0{,}05$
$z_{0,05} = 1{,}65$

Dal momento che non ci sono informazioni né sulla vera proporzione né sulla sua varianza, ci si pone nell'ipotesi più pessimistica, ossia di una proporzione π pari a 0,5 (ipotesi di massima incertezza sul fenomeno) cui d'altronde corrisponde il valore massimo per la varianza:

$$\sigma_x^2 = \pi(1 - \pi) = 0,5^2 = 0,25$$

In tal caso la numerosità dovrà essere:

$$n > \frac{z_{0,05}^2 * \sigma_x^2}{e^2} = \frac{1,65^2 \times 0,25}{0,05^2} = 270,6$$

ossia non inferiore a 271 unità.