ESERCIZIO 4.1

Ad una popolazione di N = 5 dattilografe è stato chiesto di battere a macchina lo stesso manoscritto. Ciascuna ha commesso un certo numero di errori:

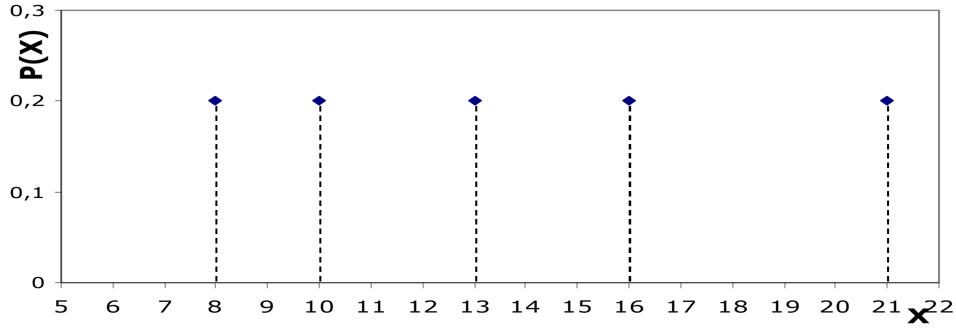
Dattilografa	Errori
A	16
B	10
C	8
D	21
E	13

a) Si definisca la distribuzione di probabilità della variabile casuale X = numero di errori;
b) si calcolino i momenti primo $E(X) = \mu$ e secondo $E(x^2) = \mu_2$ di X;
c) si selezionino da X tutti i possibili campioni X_i di ampiezza n = 2, utilizzando lo schema di campionamento senza ripetizione;
d) determinare la distribuzione campionaria di $\bar{x}$ e di $\bar{x}_2$;
e) calcolare il valore atteso e la varianza di $\bar{x}$ e di $\bar{x}_2$.

Soluzione

a)
La v.c. X = numero di errori ha la seguente distribuzione di probabilità:

X	P(X)
16	0,2
10	0,2
8	0,2
21	0,2
13	0,2
	1



b)

$$E(X) = \mu = \sum_{i=1}^{5} x_i p(x_i) = (16 \times 0,2) + (10 \times 0,2) + (8 \times 0,2) + (21 \times 0,2) + (13 \times 0,2) = 13,6$$

$$E(X^2) = \mu_2 = \sum_{i=1}^{5} x_i^2 p(x_i) = (256 \times 0,2) + (100 \times 0,2) + (64 \times 0,2) + (441 \times 0,2) +$$
$$+ (169 \times 0,2) = 206$$

c)
Il numero di campioni senza ripetizione di ampiezza n estraibili da una popolazione di N elementi è determinato dalla formula $\frac{N!}{(N-n)!}$.

Nel nostro caso, essendo N = 5 ed n = 2, esistono $\frac{5!}{(5-2)!} = 20$ campioni:

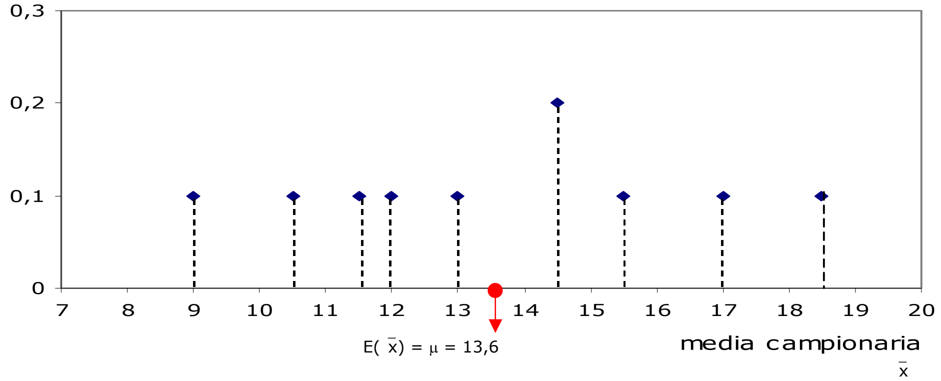
		x_1	x_2	$\bar{x}$	$\overline{x}_2$
1	AB	16	10	13	178,0
2	AC	16	8	12	160,0
3	AD	16	21	18,5	348,5
4	AE	16	13	14,5	212,5
5	BA	10	16	13	178,0
6	BC	10	8	9	82,0
7	BD	10	21	15,5	270,5
8	BE	10	13	11,5	134,5
9	CA	8	16	12	160,0
10	CB	8	10	9	82,0

		x_1	x_2	$\bar{x}$	$\overline{x}_2$
11	CD	8	21	14,5	252,5
12	CE	8	13	10,5	116,5
13	DA	21	16	18,5	348,5
14	DB	21	10	15,5	270,5
15	DC	21	8	14,5	252,5
16	DE	21	13	17	305,0
17	EA	13	16	14,5	212,5
18	EB	13	10	11,5	134,5
19	EC	13	8	10,5	116,5
20	ED	13	21	17	305,0

d)
La distribuzione di probabilità del momento primo μ si ottiene immediatamente dalla sua distribuzione di frequenze:

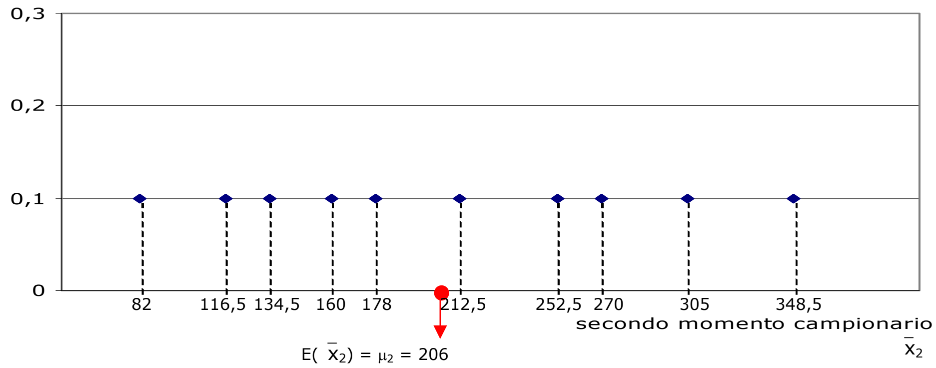
	$\bar{x}$	f
1	9	2
2	10,5	2
3	11,5	2
4	12	2
5	13	2
6	14,5	4
7	15,5	2
8	17	2
9	18,5	2
		20

$\bar{x}$	$P(\bar{x})$
9	0,1
10,5	0,1
11,5	0,1
12	0,1
13	0,1
14,5	0,2
15,5	0,1
17	0,1
18,5	0,1
	1



Lo stesso va fatto per il momento secondo μ_2 considerando, però, che nessuno dei valori si presenta più di una volta, per cui tutti hanno la medesima probabilità, ossia 1/20 = 0,05

	$\bar{x}_2$	$P(\bar{x}_2)$
1	82,0	0,1
2	116,5	0,1
3	134,5	0,1
4	160,0	0,1
5	178,0	0,1
6	212,5	0,1
7	252,5	0,1
8	270,5	0,1
9	305,0	0,1
10	348,5	0,1
		1



e)

Il valore atteso del momento primo *campionario* $E(\bar{x})$ è:

$$E\left(\bar{x}\right) = \sum_{i=1}^{9} \bar{x}_i P\left(\bar{x}_i\right) = \left(9 \times 0,1\right) + \left(10,5 \times 0,1\right) + \left(11,5 \times 0,1\right) + \cdots + \left(17 \times 0,1\right) = 13,6$$

Il valore atteso del momento secondo *campionario* $E(\bar{x}_2)$ è:

$$E\left(\bar{x}_2\right) = \sum_{i=1}^{10} \bar{x}_{2i} P\left(\bar{x}_{2i}\right) = \left(82 \times 0,1\right) + \left(116,5 \times 0,1\right) + \cdots + \left(348,5 \times 0,1\right) = 206\,.$$

Confrontando questi risultati con quelli della popolazione, è possibile concludere che:

$$E(\bar{x}) = \mu$$

$$E(\bar{x}_2) = \mu_2$$

Infine:

- la varianza del momento primo *campionario* $\sigma^2_{\bar{x}}$ è:

$$\sigma^2_{\bar{x}} = E\left(\bar{x} - E\left(\bar{x}\right)\right)^2 = \sum_{i=1}^{9} \left(\bar{x}_i - \mu\right)^2 P\left(\bar{x}_i\right) = \left(9 - 13,6\right)^2 * 0,1 + \left(10,5 - 13,6\right)^2 * 0,1 +$$
$$+ \cdots + \left(18,5 - 13,6\right)^2 * 0,1 = 7,9;$$

- la varianza del momento secondo *campionario* $\sigma^2_{\bar{x}_2}$ è:

$$\sigma^2_{\bar{x}_2} = E\left(\bar{x}_2 - E\left(\bar{x}_2\right)\right)^2 = \sum_{i=1}^{10} \left(\bar{x}_{2i} - \mu_2\right)^2 P\left(\bar{x}_{2i}\right) = \left(82 - 206\right)^2 * 0,1 + \left(116,5 - 206\right)^2 * 0,1 +$$
$$+ \cdots + \left(348,5 - 206\right)^2 * 0,1 = 6787,05.$$

ESERCIZIO 4.2

Per la variabile casuale X del problema 4.1

X	P(X)
16	0,2
10	0,2
8	0,2
21	0,2
13	0,2
	1

a) si calcoli il momento terzo standardizzato $\overset{=}{\mu}_3 = E\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^3$;

b) si estraggano tutti i possibili campioni di ampiezza n = 3;

c) si definisca la distribuzione di probabilità della v.c. $\overset{=}{x}_3$ = momento terzo standardizzato campionario;

d) si calcoli il valore atteso di $\overset{=}{x}_3$ e si confronti con il parametro calcolato sull'intera popolazione.

<u>Soluzione</u>

a)

Per calcolare il momento terzo è necessario conoscere μ e σ.
Ricordando che il valore atteso E(X) = μ è uguale a 13,6, e che $E(X^2) = \mu_2$ è uguale a 206, è possibile calcolare σ^2 come:

$$\sigma^2 = E\left(X^2\right) - \left[E\left(X\right)\right]^2 = 206 - 184,96 = 21,04$$

quindi

$$\sigma = \sqrt{21.04} = 4.59$$

Il momento terzo $\overset{=}{\mu}_3$ è, dunque:

$$\overset{=}{\mu}_3 = \frac{1}{\sigma^3}\sum_{i=1}^{5}\left[\left(x_i - \mu\right)^3 P\left(x_i\right)\right] = \frac{1}{4,59^3}\left[\left(16-13,6\right)^3 \times 0,2 + \left(10-13,6\right)^3 \times 0,2 + \right.$$

$$\left. + \left(8-13,6\right)^3 \times 0,2 + \left(21-13,6\right)^3 \times 0,2 + \left(13-13,6\right)^3 \times 0,2\right] = 0,41$$

b)

Per n = 3 esistono $C = \frac{N!}{(N-n)!} = \frac{5!}{2!} = 60$ campioni.

Per ciascuno di essi si calcola il momento terzo $\bar{\bar{x}}_{3k} = \frac{1}{\sigma_k^3}\sum_{i=1}^{3}(x_{ik} - \mu_k)^3$, dove k = 1, …, C indica il campione che di volta in volta è considerato:

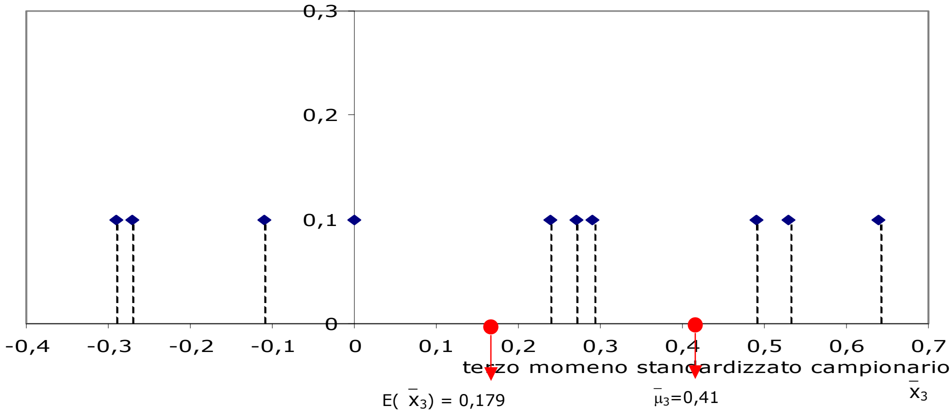
	x_1	x_2	x_3	$\bar{x}$	s^2	s	$\bar{\bar{x}}_3$
1	16	10	8	11,33	11,56	3,40	0,53
2	16	10	21	15,67	20,22	4,50	-0,11
3	16	10	13	13,00	6,00	2,45	0,00
4	16	8	10	11,33	11,56	3,40	0,53
5	16	8	21	15,00	28,67	5,35	-0,27
6	16	8	13	12,33	10,89	3,30	-0,29
7	16	21	10	15,67	20,22	4,50	-0,11
8	16	21	8	15,00	28,67	5,35	-0,27
9	16	21	13	16,67	10,89	3,30	0,29
10	16	13	10	13,00	6,00	2,45	0,00
11	16	13	8	12,33	10,89	3,30	-0,29
12	16	13	21	16,67	10,89	3,30	0,29
13	10	16	8	11,33	11,56	3,40	0,53
14	10	16	21	15,67	20,22	4,50	-0,11
15	10	16	13	13,00	6,00	2,45	0,00
16	10	8	16	11,33	11,56	3,40	0,53
17	10	8	21	13,00	32,67	5,72	0,64
18	10	8	13	10,33	4,22	2,05	0,24
19	10	21	16	15,67	20,22	4,50	-0,11
20	10	21	8	13,00	32,67	5,72	0,64
21	10	21	13	14,67	21,56	4,64	0,49
22	10	13	16	13,00	6,00	2,45	0,00
23	10	13	8	10,33	4,22	2,05	0,24
24	10	13	21	14,67	21,56	4,64	0,49
25	8	16	10	11,33	11,56	3,40	0,53
26	8	16	21	15,00	28,67	5,35	-0,27
27	8	16	13	12,33	10,89	3,30	-0,29
28	8	10	16	11,33	11,56	3,40	0,53
29	8	10	21	13,00	32,67	5,72	0,64
30	8	10	13	10,33	4,22	2,05	0,24

	x_1	x_2	x_3	$\bar{x}$	s^2	s	$\bar{\bar{x}}_3$
31	8	21	16	15,00	28,67	5,35	-0,27
32	8	21	10	13,00	32,67	5,72	0,64
33	8	21	13	14,00	28,67	5,35	0,27
34	8	13	16	12,33	10,89	3,30	-0,29
35	8	13	10	10,33	4,22	2,05	0,24
36	8	13	21	14,00	28,67	5,35	0,27
37	21	16	10	15,67	20,22	4,50	-0,11
38	21	16	8	15,00	28,67	5,35	-0,27
39	21	16	13	16,67	10,89	3,30	0,29
40	21	10	16	15,67	20,22	4,50	-0,11
41	21	10	8	13,00	32,67	5,72	0,64
42	21	10	13	14,67	21,56	4,64	0,49
43	21	8	16	15,00	28,67	5,35	-0,27
44	21	8	10	13,00	32,67	5,72	0,64
45	21	8	13	14,00	28,67	5,35	0,27
46	21	13	16	16,67	10,89	3,30	0,29
47	21	13	10	14,67	21,56	4,64	0,49
48	21	13	8	14,00	28,67	5,35	0,27
49	13	16	10	13,00	6,00	2,45	0,00
50	13	16	8	12,33	10,89	3,30	-0,29
51	13	16	21	16,67	10,89	3,30	0,29
52	13	10	16	13,00	6,00	2,45	0,00
53	13	10	8	10,33	4,22	2,05	0,24
54	13	10	21	14,67	21,56	4,64	0,49
55	13	8	16	12,33	10,89	3,30	-0,29
56	13	8	10	10,33	4,22	2,05	0,24
57	13	8	21	14,00	28,67	5,35	0,27
58	13	21	16	16,67	10,89	3,30	0,29
59	13	21	10	14,67	21,56	4,64	0,49
60	13	21	8	14,00	28,67	5,35	0,27

c)

La distribuzione di probabilità del terzo momento campionario $\overline{\overline{x}}_3$ è la seguente:

	$\overline{\overline{x}}_3$	$P\left(\overline{\overline{x}}_3\right)$
1	-0,29	0,1
2	-0,27	0,1
3	-0,11	0,1
4	0,00	0,1
5	0,24	0,1
6	0,27	0,1
7	0,29	0,1
8	0,49	0,1
9	0,53	0,1
10	0,64	0,1
		1



d)

Il valore atteso di $\overline{\overline{x}}_3$ è:

$$E\left(\overline{\overline{x}}_3\right) = \sum_{i=1}^{10}\left[\overline{\overline{x}}_{3i} * P\left(\overline{\overline{x}}_{3i}\right)\right] = (-0,29 * 0,1) + (-0,27 * 0,1) + (-0,11 * 0,1) + (0,24 * 0,1) +$$
$$+ (0,27 * 0,1) + (0,29 * 0,1) + (0,49 * 0,1) + (0,53 * 0,1) + (0,64 * 0,1) = 0,179$$

Quindi:

$$E\left(\overline{\overline{x}}_3\right) \neq \overline{\overline{\mu}}_3$$

ESERCIZIO 4.3

In un' impresa si riscontra che il 30% delle operazioni di credito verso altre imprese è costituito da operazioni scadute. Calcolare la probabilità che, estraendo un campione di 5 operazioni:

a) nessuna sia scaduta;
b) 2 siano scadute;
c) la maggior parte di esse siano scadute;
d) il 20% di esse siano scadute.

<u>Soluzione</u>

Secondo la legge Binomiale, la probabilità di x successi in n prove con probabilità di successo p è pari a:

$$P(x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} = \frac{n!}{x!(n-x)!} p^x (1-p)^{n-x}$$

I 5 elementi del campione possono essere considerati come altrettante prove in cui, ipotizzando un campionamento con ripetizione, la probabilità di successo è pari a 0,3.
Sostituendo si ha:

a)

$$P(0) = \binom{5}{0} 0,3^0 * 0,7^5 = \frac{5!}{0!5!} * 0,16807 = 0,17$$

b)

$$P(2) = \binom{5}{2} 0,3^2 * 0,7^3 = \frac{5!}{2!3!} * 0,09 * 0,343 = 0,3087$$

c)

La maggior parte di 5 elementi è costituita da almeno 3 di essi, quindi:

$P(X \geq 3) = P(3) + P(4) + P(5)$

$$P(3) = \frac{5!}{3!2!} 0,3^3 * 0,7^2 = 10 * 0,027 * 0,49 = 0,1323$$

$$P(4) = \frac{5!}{4!1!} 0,3^4 * 0,7^1 = 5 * 0,0081 * 0,70 = 0,02835$$

$$P(5) = \frac{5!}{5!0!} 0,3^5 * 0,7^0 = 1 * 0,024 * 1 = 0,00243$$

$P(X \geq 3) = P(3) + P(4) + P(5) = 0,1323 + 0,02835 + 0,00243 = 0,16308$

d)
Il 20% di 5 è uguale a $5 \times 0{,}02 = 1$

$$P\left(\frac{x}{5} = 0{,}2\right) = P(1) = \frac{5!}{1!4!} 0{,}3^1 * 0{,}7^4 = 5 * 0{,}3 * 0{,}2402 = 0{,}36015$$

ESERCIZIO 4.4

In un lotto di valvole elettriche il 5% è difettoso. Si estrae un campione di 20 valvole. Si calcoli la probabilità che:

a) al massimo 2 siano difettose;
b) almeno 3 siano difettose.

Soluzione

Impiegando la distribuzione Binomiale si ha:

a)

$$P(X \le 2) = \sum_{x=1}^{2} P(x) = P(0) + P(1) + P(2)$$

$$P(0) = \binom{20}{0} \frac{20!}{0!20!} 0,05^{0} * 0,95^{20} = 1 * 1 * 0,3585 = 0,3585$$

$$P(1) = \binom{20}{1} \frac{20!}{1!19!} 0,05^{1} * 0,95^{19} = 20 * 0,05 * 0,3972 = 0,37735$$

$$P(2) = \binom{20}{2} \frac{20!}{2!18!} 0,05^{2} * 0,95^{18} = 0,18868$$

$P(X \le 2) = 0,3585 + 0,37735 + 0,18868 = 0,92452$

b)

$$P(X \ge 3) = \sum_{x=3}^{20} P(x) = 1 - P(X \le 2) = 1 - [P(0) + P(1) + P(2)] =$$

$$= 1 - (0,3585 + 0,37735 + 0,18868) = 1 - 0,92452 = 0,07547$$

ESERCIZIO 4.5

I candidati ad un concorso vengono sottoposti ad un test costituito da due gruppi di domande a risposta multipla, il primo di 5 domande con 3 possibili risposte ed il secondo con 5 domande con 4 possibili risposte.
Il candidato viene promosso se risponde correttamente ad almeno 6 domande.
Calcolare la probabilità di essere promossi al test.

Soluzione

Il risultato di 6 risposte corrette in tutto può essere raggiunto combinando le risposte alle domande dei due gruppi come segue:
La variabile casuale X = risposte esatte è data dalla somma delle due variabili casuali:

X1 = numero di risposte corrette del gruppo 1

ed

X2 = "numero di risposte corrette del gruppo 2

distribuite come due distribuzioni Binomiali con parametri (n_1 = 5, p_1 = 0,33) ed (n_2 = 5, p_2 = 0,25) si ha:

Dobbiamo calcolare:

$$P(X=6) + P(X=7) + P(X=8) + P(X=9) + P(X=10)$$

X_1 \ X_2	0	1	2	3	4	5
0	0	1	2	3	4	5
1	1	2	3	4	5	6
2	2	3	4	5	6	7
3	3	4	5	6	7	8
4	4	5	6	7	8	9
5	5	6	7	8	9	10

Sulla tabella è facile visualizzare le combinazioni di valori di X_1 e X_2 che danno luogo ai valori desiderati della X.
Bisogna, dunque, calcolare le probabilità dei singoli valori di X_1 e X_2

Per la variabile casuale X_1 si ha:

$$P(1) = \binom{5}{1} 0,33^1 * 0,67^4 = 5 * 0,33 * 0,20151 = 0,3324$$
$$P(2) = \binom{5}{2} 0,33^2 * 0,67^3 = 10 * 0,1089 * 0,3 = 0,3275$$
$$P(3) = \binom{5}{3} 0,33^3 * 0,67^2 = 10 * 0,0359 * 0,4489 = 0,16$$
$$P(4) = \binom{5}{4} 0,33^4 * 0,67^1 = 5 * 0,01185 * 0,67 = 0,0397$$
$$P(5) = \binom{5}{5} 0,33^5 * 0,67^0 = 1 * 0,00391 * 1 = 0,00391$$

Per la variabile casuale X_2 si ha:

$$P(1) = \binom{5}{1} 0,25^1 * 0,75^4 = 5 * 0,25 * 0,3164 = 0,3955$$
$$P(2) = \binom{5}{2} 0,25^2 * 0,75^3 = 10 * 0,0625 * 0,4218 = 0,2637$$
$$P(3) = \binom{5}{3} 0,25^3 * 0,75^2 = 10 * 0,0156 * 0,5625 = 0,0877$$
$$P(4) = \binom{5}{4} 0,25^4 * 0,75^1 = 5 * 0,0039 * 0,75 = 0,0146$$
$$P(5) = \binom{5}{5} 0,25^5 * 0,75^0 = 1 * 0,00097 * 1 = 0,00097$$

Il calcolo delle probabilità dei diversi valori di X può essere semplificato sfruttando la tabella precedente, inserendovi, accanto ai valori di X_1 e X_2, le rispettive probabilità appena determinate:

			X_2					
			0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
			0,2373	**0,3955**	**0,2637**	**0,0877**	**0,0146**	**0,0009**
	0	**0,1350**						
	1	**0,3324**						P(1+5) 0,0003
X_1	**2**	**0,3275**					P(2+4) 0,0048	P(2+5) 0,0003
	3	**0,1600**				P(3+3) 0,0140	P(3+4) 0,0023	P(3+5) 0,0001
	4	**0,0397**			P(4+2) 0,0104	P(4+3) 0,0034	P(4+4) 0,0005	9 <0,0001
	5	**0,0039**		P(5+1) 0,0015	P(5+2) 0,0010	P(5+3) 0,0003	P(5+4) <0,0001	P(5+5) <0,0001

P(X=6) = $P(X_1=5) * P(X_2=1) + P(X_1=4) * P(X_2=2) + P(X_1=3) * P(X_2=3) +$
$+ P(X_1=2) * P(X_2=4) + P(X_1=1) * P(X_2=5) =$
= 0,0015 + 0,0104 + 0,0140 + 0,0048 + 0,0003 **= 0,031**

P(X=7) = P(X1=5) * P(X2=2) + P(X1=4) * P(X2=3) + P(X1=3) * P(X2=4) +
+ P(X1=2) * P(X2=5) =
= 0,001 + 0,0034 + 0,0023 + 0,0003 **= 0,007**

P(X=8) = P(X1=5) * P(X2=3) + P(X1=4) * P(X2=4) + P(X1=3) * P(X2=5) =
0,0003 + 0,0005 + 0,0001 **= 0,0009**

P(X=9) = P(X1=5) * P(X2=4) + P(X1=4) * P(X2=5) =
= 0,00005694 + 0,00003573 **= 0,00009267**

P(X=10) = P(X1=5) * P(X2=5) = **0,00000351**

In conclusione, la probabilità di superare il test è uguale a:

P(X=6) + P(X=7) + P(X=8) + P(X=9) + P(X=10) =

0,031 + 0,007 + 0,0009 + 0,00009267 + 0,00000351 = 0,0389