ESERCIZIO 3.1

Il tempo di reazione ad un esperimento psicologico effettuato su un gruppo di individui si distribuisce normalmente con media μ = 20 secondi e scarto quadratico medio σ = 4 secondi:

$$X \sim N\,(20, 16)$$

a) Qual è la probabilità che un individuo abbia un tempo di reazione compreso tra 14 e 30 secondi?
b) Qual è la probabilità che un individuo abbia un tempo di reazione tra i 25 ed i 30 secondi?
c) Quanti individui hanno un tempo di reazione superiore ai 14 secondi?
d) Quale deve essere il tempo di reazione perché solo l'1% sia più lento?
e) Qual è il tempo di reazione corrispondente a Q_3?

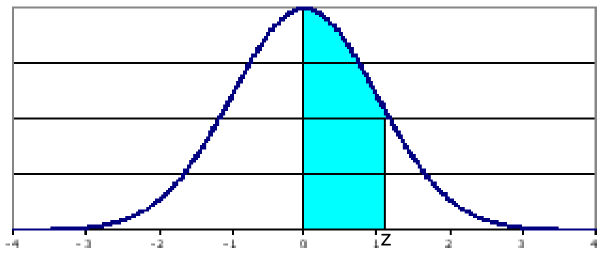
<u>Soluzione</u>

a)
Dal momento che $P(14 \leq X \leq 30) = P(z_{14} \leq Z \leq z_{30})$, bisogna procedere alla standardizzazione dei due estremi dell'intervallo di interesse:

$$z_{14} = \frac{14 - 20}{4} = -1,5$$

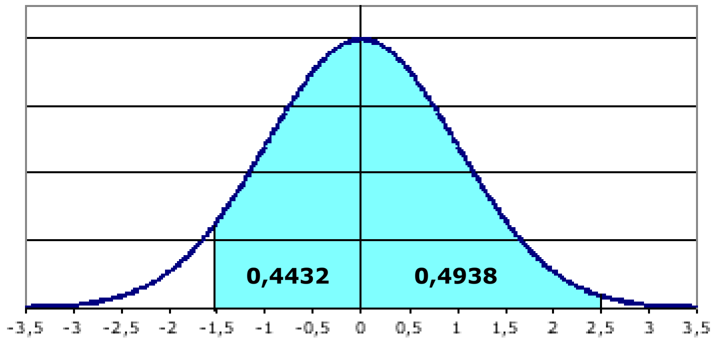
$$z_{30} = \frac{30 - 20}{4} = 2,5$$

La probabilità che cerchiamo è, dunque, uguale a $P(-1,5 \leq Z \leq 2,5)$.
La tavola della distribuzione Normale standard cui si fa riferimento esprime per ogni valore z_i la probabilità che Z sia compresa tra 0 e z_i:



$P(-1,5 \leq Z \leq 2,5)$ può, dunque essere determinata come:

$$P(-1,5 \leq Z \leq 0\ ) + P(0 \leq Z \leq 2,5)$$



Per la simmetria della distribuzione Normale, $P(-1,5 \leq Z \leq 0) = P(0 \leq Z \leq 1,5)$, per cui $P(-1,5 \leq Z \leq 2,5)$ può essere ottenuta come:

$$P(0 \leq Z \leq 1,5) + P(0 \leq Z \leq 2,5)$$

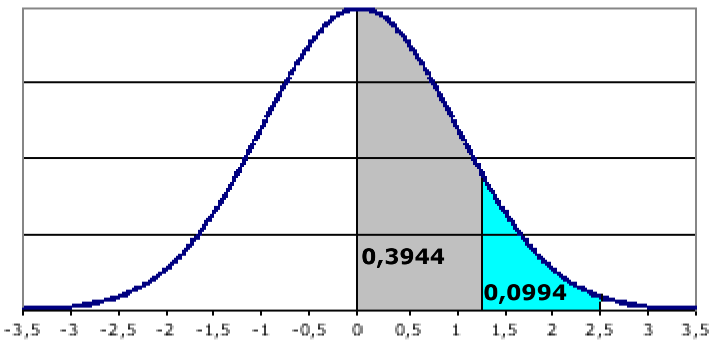
Ossia, cercando i due valori di probabilità agli incroci di 1,5 e di 2,5 con 0,00:

	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	...
...	...	...	...	...	...	...	...
1,0	0,3413	0,3438	0,3461	0,3485	0,3508	0,3531	...
1,1	0,3643	0,3665	0,3686	0,3708	0,3729	0,3749	...
1,2	0,3849	0,3869	0,3888	0,3907	0,3925	0,3944	...
1,3	0,4032	0,4049	0,4066	0,4082	0,4099	0,4115	...
1,4	0,4192	0,4207	0,4222	0,4236	0,4251	0,4265	...
1,5	**0,4332**	0,4345	0,4357	0,4370	0,4382	0,4394	...
...	...	...	...	...	...	...	...
2,0	0,4772	0,4778	0,4783	0,4788	0,4793	0,4798	...
2,1	0,4821	0,4826	0,4830	0,4834	0,4838	0,4842	...
2,2	0,4861	0,4864	0,4868	0,4871	0,4875	0,4878	...
2,3	0,4893	0,4896	0,4898	0,4901	0,4904	0,4906	...
2,4	0,4918	0,4920	0,4922	0,4925	0,4927	0,4929	...
2,5	**0,4938**	0,4940	0,4941	0,4943	0,4945	0,4946	...
2,6	0,4953	0,4955	0,4956	0,4957	0,4959	0,4960	...
2,7	0,4965	0,4966	0,4967	0,4968	0,4969	0,4970	...
...	...	...	...	...	...	...	...

$P(14 \leq X \leq 30) = P(-1,5 \leq Z \leq 2,5) = 0,4332 + 0,4938 = 0,927$

b)
Seguendo la medesima logica del caso a) si ha:

$$P(25 \leq X \leq 30) = P(z_{25} \leq Z \leq z_{30}) = P\left(\frac{25-20}{4} \leq Z \leq \frac{30-20}{4}\right) = P(1,25 \leq Z \leq 2,5)$$



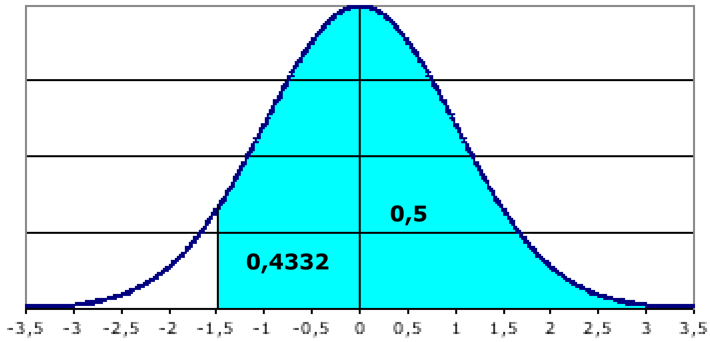
Tale probabilità può essere ottenuta come:

$P(0 \leq Z \leq 2,5) - P(0 \leq Z \leq 1,25) = 0,4938 - 0,3944 = 0,0994$

	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	...
...	...	...	...	...	...	...	...
1,0	0,3413	0,3438	0,3461	0,3485	0,3508	0,3531	...
1,1	0,3643	0,3665	0,3686	0,3708	0,3729	0,3749	...
1,2	0,3849	0,3869	0,3888	0,3907	0,3925	**0,3944**	...
1,3	0,4032	0,4049	0,4066	0,4082	0,4099	0,4115	...
1,4	0,4192	0,4207	0,4222	0,4236	0,4251	0,4265	...
1,5	0,4332	0,4345	0,4357	0,4370	0,4382	0,4394	...
...	...	...	...	...	...	...	...
2,0	0,4772	0,4778	0,4783	0,4788	0,4793	0,4798	...
2,1	0,4821	0,4826	0,4830	0,4834	0,4838	0,4842	...
2,2	0,4861	0,4864	0,4868	0,4871	0,4875	0,4878	...
2,3	0,4893	0,4896	0,4898	0,4901	0,4904	0,4906	...
2,4	0,4918	0,4920	0,4922	0,4925	0,4927	0,4929	...
2,5	**0,4938**	0,4940	0,4941	0,4943	0,4945	0,4946	...
2,6	0,4953	0,4955	0,4956	0,4957	0,4959	0,4960	...
2,7	0,4965	0,4966	0,4967	0,4968	0,4969	0,4970	...
...	...	...	...	...	...	...	...

c)
A tale quesito si può rispondere solo fornendo la percentuale di individui che rispondono alla caratteristica richiesta, ossia la probabilità di avere un tempo maggiore di 14 secondi.

$P(X > 14) = P(Z > Z_{14}) = P(Z > -1,5) = P(-1,5 \leq Z \leq 0\ ) + P(0 \leq Z \leq +\infty) = P(0 \leq Z \leq 1,5\ ) + P(0 \leq Z \leq +\infty) = 0,4332 + 0,5 = 0,9332$



	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	...
...	...	...	...	...	...	...	...
1,2	0,3849	0,3869	0,3888	0,3907	0,3925	0,3944	...
1,3	0,4032	0,4049	0,4066	0,4082	0,4099	0,4115	...
1,4	0,4192	0,4207	0,4222	0,4236	0,4251	0,4265	...
1,5	**0,4332**	0,4345	0,4357	0,4370	0,4382	0,4394	...
1,6	0,4452	0,4463	0,4474	0,4484	0,4495	0,4505	...
...	...	...	...	...	...	...	...

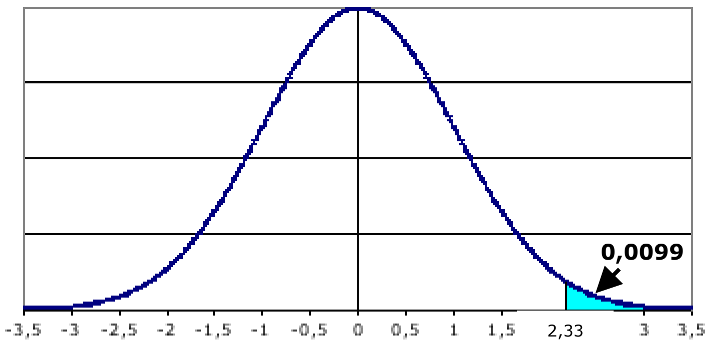
La percentuale cercata è, dunque, 93,32%.

d)

Si cerca quel valore $z_{0,01}$ che alla sua destra lascia un'area pari a 0,01. La logica da seguire è inversa ai casi precedenti: dal momento che la tavola riporta le probabilità che Z si trovi tra 0 e z_i, si scorre la tavola alla ricerca del valore di probabilità più vicino a 0,49 (=0,5 - 0,01), per poi risalire all'ascissa corrispondente come somma delle intestazioni della riga e della colonna che il valore di probabilità incrocia:

	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	...
...	...	...	...	...	...	...	...
2,1	0,4821	0,4826	0,4830	0,4834	0,4838	0,4842	...
2,2	0,4861	0,4864	0,4868	0,4871	0,4875	0,4878	...
2,3	0,4893	0,4896	0,4898	**0,4901**	0,4904	0,4906	...
2,4	0,4918	0,4920	0,4922	0,4925	0,4927	0,4929	...
2,5	0,4938	0,4940	0,4941	0,4943	0,4945	0,4946	...
...	...	...	...	...	...	...	...

Il valore più prossimo a 0,49 presente sulla tavola è 0,4901, che si trova all'incrocio tra 2,3 e 0,03, e che, quindi, corrisponde all'ascissa 2,33:

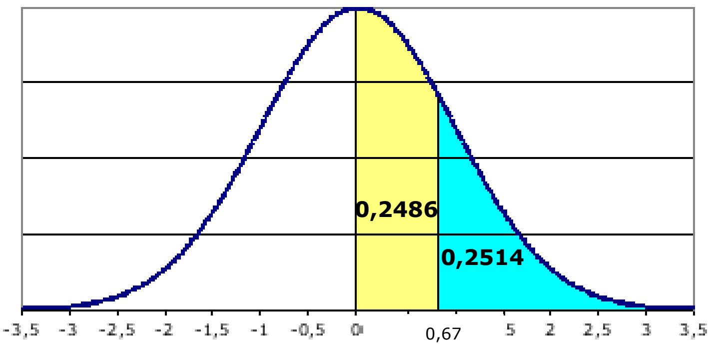


Dal valore di Z si ricava il corrispondente valore di X ~ N (20, 16):

$$x_{0,01} = \sigma_{0,01} z + \mu = 4 \cdot 2,33 + 20 = 29,32$$

e)
Allo stesso modo, il terzo quartile è quel valore che lascia alla sua sinistra il 75% della distribuzione ed alla sua destra il 25%, quindi va ricercato sulla tavola il valore di probabilità più vicino a 0,25 (= 0,5 – 0,25). Tale valore va individuato in 0,2486 che corrisponde all'ascissa 0,67 (0,6 + 0,07).

	...	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
...	...	...	...	...	...	...	...	...
0,3	...	0,1293	0,1331	0,1368	0,1406	0,1443	0,1480	0,1517
0,4	...	0,1664	0,1700	0,1736	0,1772	0,1808	0,1844	0,1879
0,5	...	0,2019	0,2054	0,2088	0,2123	0,2157	0,2190	0,2224
0,6		0,2357	0,2389	0,2422	0,2454	**0,2486**	0,2517	0,2549
0,7	...	0,2673	0,2704	0,2734	0,2764	0,2794	0,2823	0,2852
0,8	...	0,2967	0,2995	0,3023	0,3051	0,3078	0,3106	0,3133
...	...	...	...	...	...	...	...	...



Il terzo quartile è, dunque, il valore di X:

$$Q_3 = x_{0,25} = \sigma z_{0,25} + \mu = 4 \cdot 0,67 + 20 = 22,68$$

che lascia alla sua destra una percentuale di osservazioni pari al 25,14%.

ESERCIZIO 3.2

Sia X ~ N (7, 9).

a) Trovare la probabilità che un valore scelto a caso cada in un intervallo che ha come centro μ e come ampiezza 2σ.

b) È possibile generalizzare il risultato ad una qualsiasi v.c. X ~ N (μ, σ^2);

c) Trovare la stessa probabilità per gli intervalli $[\mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma]$ e $[\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma]$.

<u>Soluzione</u>

a)

L'unico intervallo centrato su μ e di ampiezza 2σ è $[\mu - \sigma, \mu + \sigma]$, ossia [4, 10].

$$P(4 \leq X \leq 10) = P\left(\frac{4-7}{3} \leq Z \leq \frac{10-7}{3}\right) = P(-1 \leq Z \leq 1) = 2 \times P(0 \leq Z \leq 1) =$$

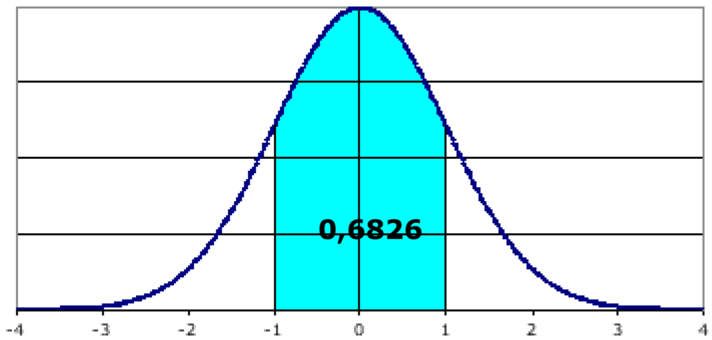
	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	...
...	...	...	...	...	...	...	...
0,9	0,3159	0,3186	0,3212	0,3238	0,3264	0,3289	...
1,0	**0,3413**	0,3438	0,3461	0,3485	0,3508	0,3531	...
1,1	0,3643	0,3665	0,3686	0,3708	0,3729	0,3749	...
1,2	0,3849	0,3869	0,3888	0,3907	0,3925	0,3944	...
1,3	0,4032	0,4049	0,4066	0,4082	0,4099	0,4115	...
...	...	...	...	...	...	...	...

$$= 2 \times 0,3413 = 0,6826$$

b)

$$P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) = P\left(\frac{(\mu-\sigma)-\mu}{\sigma} \leq Z \leq \frac{(\mu+\sigma)-\mu}{\sigma}\right) = P(-1 \leq Z \leq 1) = 2 \times P(0 \leq Z \leq 1) = 2 \times 0,3413 = 0,6826$$

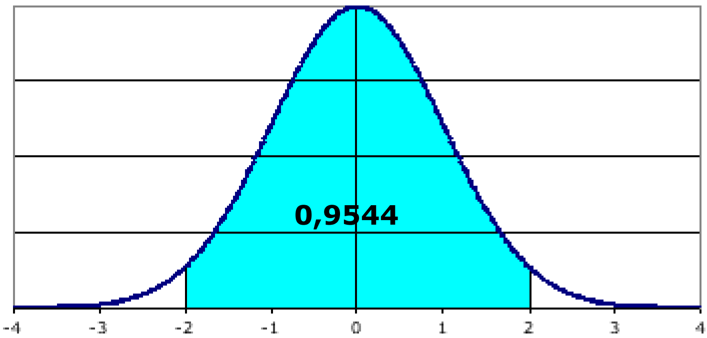
Dunque, è possibile generalizzare: per qualsiasi v.c. Normale con media μ e varianza σ^2, la probabilità che un valore scelto a caso cada in un intervallo che ha come centro μ e come ampiezza 2σ è sempre uguale a 0,6826.



c)

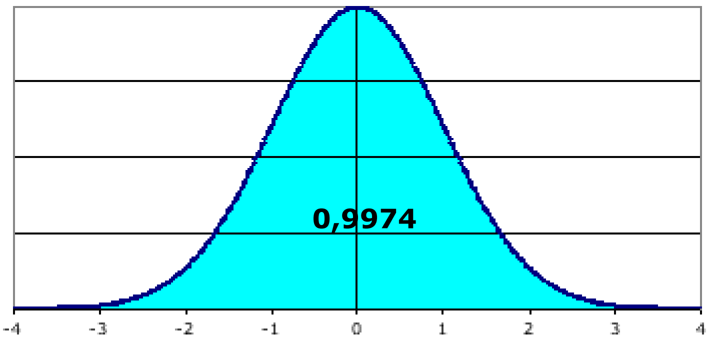
$$P(\mu - 2\sigma \le X \le \mu + 2\sigma) = P\left(\frac{(\mu - 2\sigma) - \mu}{\sigma} \le Z \le \frac{(\mu + 2\sigma) - \mu}{\sigma}\right) = P(-2 \le Z \le 2) =$$

$$2 \times P(0 \le Z \le 2) = 2 \times 0{,}4772 = 0{,}9544$$



$$P(\mu - 3\sigma \le X \le \mu + 3\sigma) = P\left(\frac{(\mu - 3\sigma) - \mu}{\sigma} \le Z \le \frac{(\mu + 3\sigma) - \mu}{\sigma}\right) = P(-3 \le Z \le 3) =$$

$$2 \times P(0 \le Z \le 3) = 2 \times 0{,}4987 = 0{,}9974$$



ESERCIZIO 3.3

Sia X la v.c. Normale con media μ = 40 cm e varianza σ^2 = 100, che descrive l'altezza di un insieme di bimbi di 3 mesi di età:

$$X \sim N(40, 100)$$

a) Si determini l'altezza x* tale che il 20% dei bimbi sia più alto;
b) Si consideri la porzione di bimbi di altezza compresa tra il primo e il terzo quartile: quanto è alto il più basso di tali bambini? E il più alto?

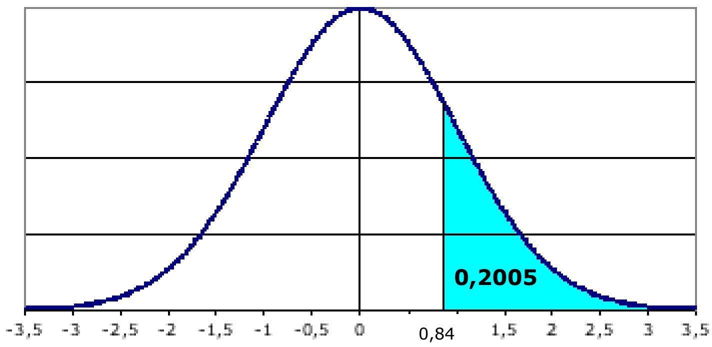
Soluzione

a)

Si ricerca quel valore x* di X che lascia alla sua destra il 20% della distribuzione.
Sulle tavole della Normale standard bisogna, cioè, cercare un'area pari a 0,5 – 0,2 = 0,3 per risalire all'ascissa che la sottende, che sarà indicata con $z_{0,2}$.

	0,00	**0,01**	**0,02**	**0,03**	**0,04**	**0,05**	**0,06**	**...**
...	...	...	...	...	...	...	...	...
0,6	0,2257	0,2291	0,2324	0,2357	0,2389	0,2422	0,2454	...
0,7	0,2580	0,2611	0,2642	0,2673	0,2704	0,2734	0,2764	...
0,8	0,2881	0,2910	0,2939	0,2967	**0,2995**	0,3023	0,3051	...
0,9	0,3159	0,3186	0,3212	0,3238	0,3264	0,3289	0,3315	...
1,0	0,3413	0,3438	0,3461	0,3485	0,3508	0,3531	0,3554	...
...	...	...	...	...	...	...	...	...

Tale valore è $z_{0,2}$ = 0,84 (= 0,8 + 0,04)



Il corrispondente valore di X, ossia x*, è:

$$x^* = \sigma z_{0,2} + \mu = 10 \times 0,84 + 40 = 48,4$$

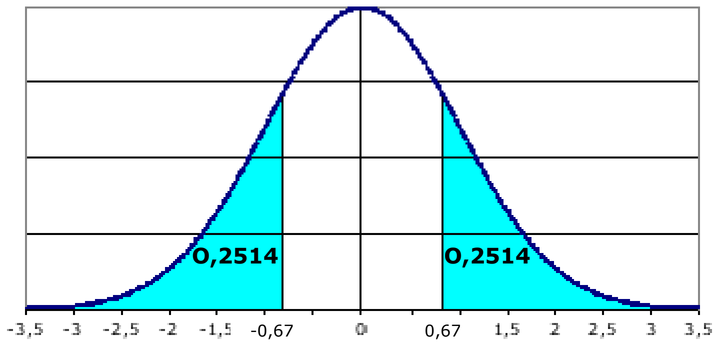
Il 20,05% dei bimbi è più alto di 48,4 cm.

b)

Il più basso ed il più alto dei bambini compresi tra il primo ed il terzo quartile hanno un'altezza esattamente uguale ai due quartili.
Considerando che l'intervallo tra i due quartili lascia un 25% della distribuzione alla sua destra ed un 25% alla sua sinistra, basta cercare sulla tavola il solo valore 0,25, che, per la simmetria della distribuzione, fornisce, cambiando il segno, anche l'ordinata di Q_1.

	...	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	...
...	...	...	...	...	...	...	...	...
0,3	...	0,1293	0,1331	0,1368	0,1406	0,1443	0,1480	...
0,4	...	0,1664	0,1700	0,1736	0,1772	0,1808	0,1844	...
0,5	...	0,2019	0,2054	0,2088	0,2123	0,2157	0,2190	...
0,6		0,2357	0,2389	0,2422	0,2454	**0,2486**	0,2517	...
0,7	...	0,2673	0,2704	0,2734	0,2764	0,2794	0,2823	...
0,8	...	0,2967	0,2995	0,3023	0,3051	0,3078	0,3106	...
...	...	...	...	...	...	...	...	...

I due valori di Z sono, dunque, $\pm z_{0,25} = \pm 0,67$



che corrispondono ai due valori di X:

$Q_1 = -\sigma z_{0,25} + \mu = 10 \times (-0,67) + 40 = 33,3$

$Q_2 = \sigma z_{0,25} + \mu = 10 \times 0,67 + 40 = 46,7$

ESERCIZIO 3.4

Il reddito dei dipendenti di 3 aziende è descritto da 3 variabili casuali Normali caratterizzate dai seguenti parametri:

$$X_1 \sim N\,(30,\ 18)$$
$$X_2 \sim N\,(25,\ 9)$$
$$X_3 \sim N\,(15,\ 16)$$

dove i valori rappresentano migliaia di euro.
Sapendo che le 3 aziende contano, rispettivamente, 7, 10 e 25 dipendenti:
a) si calcoli la probabilità che il reddito dell'intero insieme dei 42 individui sia compreso tra 20.000 e 25.000 euro;
b) si rappresentino graficamente le 3 distribuzioni con la distribuzione globale.

<u>Soluzione</u>
a)
Per la proprietà riproduttiva della v.c. Normale si ha:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i X_i \sim N\left(\sum_{i=1}^{n} a_i \mu_i, \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \sigma_i^2\right)$$

Il reddito dell'intero insieme di individui può essere considerato come una combinazione lineare dei redditi delle 3 aziende. Dal momento che si parte dai redditi medi dei 3 gruppi, il sistema di coefficienti di tale combinazione può essere derivato come rapporto tra numero di dipendenti per azienda e totale degli individui considerati:

a_1 = 7/42 = 0,17
a_2 = 10/42 = 0,24
a_3 = 25/42 = 0,59.

Il reddito generale è dunque descritto dalla v.c. Normale X i cui parametri possono essere ottenuti come:

$$\mu_X = \sum_{i=1}^{n} a_i \mu_i = (0,17 \times 30) + (0,24 \times 25) + (0,59 \times 15) = 19,95$$
$$\sigma_X^2 = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \sigma_i^2 = (0,17^2 \times 18) + (0,24^2 \times 9) + (0,59^2 \times 16) = 6,67$$

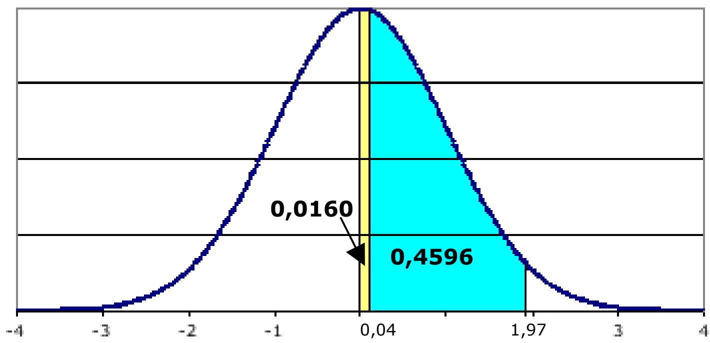
Quindi:

$$X \sim N\,(19,95;\ 6,67)$$

Per cui:

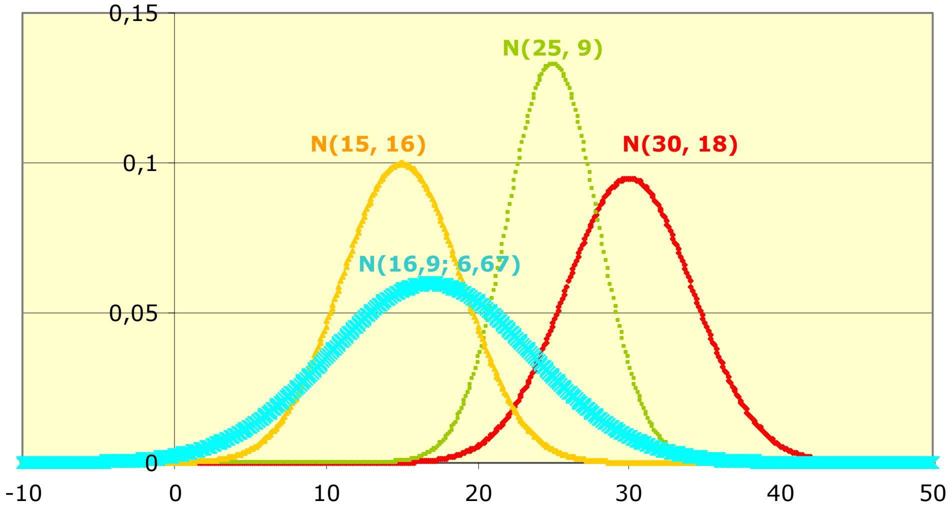
$$P(20 \le X \le 25) = P\left(\frac{20 - 19,95}{\sqrt{6,67}} \le Z \le \frac{25 - 19,95}{\sqrt{6,67}}\right) = P(0,04 \le Z \le 1,97) =$$

$= P(0 \le Z \le 1{,}97) - P(0 \le Z \le 0{,}04) = 0{,}4756 - 0{,}0160 = 0{,}4596$



	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,0000	0,0040	0,0080	0,0120	**0,0160**	0,0199	0,0239	0,0279	0,0319	0,0359
0,1	0,0398	0,0438	0,0478	0,0517	0,0557	0,0596	0,0636	0,0675	0,0714	0,0753
0,2	0,0793	0,0832	0,0871	0,0910	0,0948	0,0987	0,1026	0,1064	0,1103	0,1141
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
1,7	0,4554	0,4564	0,4573	0,4582	0,4591	0,4599	0,4608	0,4616	0,4625	0,4633
1,8	0,4641	0,4649	0,4656	0,4664	0,4671	0,4678	0,4686	0,4693	0,4699	0,4706
1,9	0,4713	0,4719	0,4726	0,4732	0,4738	0,4744	0,4750	**0,4756**	0,4761	0,4767
2,0	0,4772	0,4778	0,4783	0,4788	0,4793	0,4798	0,4803	0,4808	0,4812	0,4817
2,1	0,4821	0,4826	0,4830	0,4834	0,4838	0,4842	0,4846	0,4850	0,4854	0,4857
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...

b)
Rappresentazione grafica delle 4 curve relative alle 3 variabili casuali originarie X_i ed alla loro combinazione lineare X.

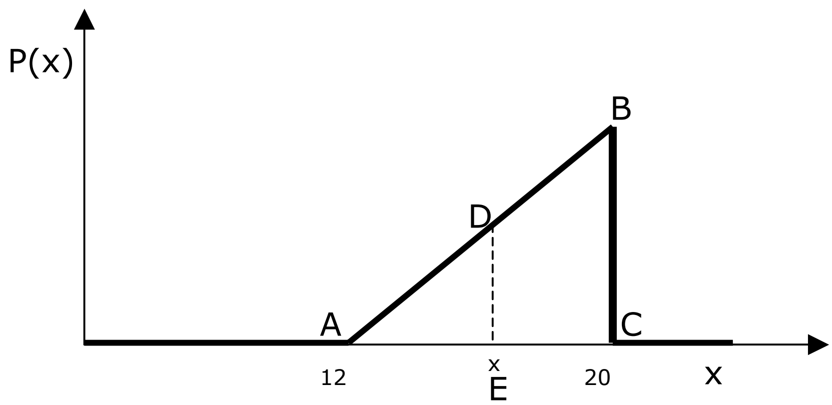


ESERCIZIO 3.5

La durata di una batteria ricaricabile, dichiarata dalla casa produttrice, è compresa tra un minimo di 12 ad un massimo di 20 ore di normale funzionamento del dispositivo che essa alimenta.
Sapendo che nell'arco di quest'intervallo di tempo la carica si esaurisce secondo un andamento lineare:
a) si rappresenti graficamente la variabile casuale X = durata della lampadina;
b) si determini la funzione di densità di probabilità di X.

<u>Soluzione</u>

a)
La v.c. X può essere rappresentata come segue:



b)
La probabilità per ogni valore di X è uguale a 0 prima delle 12 ore e torna pari a 0 dopo le 20 ore. In questo intervallo, la probabilità di esaurimento della batteria cresce gradualmente col passare del tempo x secondo la funzione lineare che può essere dedotta come segue.
Per calcolare il valore generico $f(x_i)$ si consideri la similitudine dei triangoli ABC ed ADE, per cui si ha:

$$AE : AC = DE : BC$$

che equivale a :

$$(20 - 12) : (x - 12) = f(20) : f(x)$$

f(20) può essere determinata considerando che l'area del triangolo è pari ad 1:

$$\frac{(20-12)\times f(20)}{2} = 1 \Rightarrow f(20) = \frac{2}{8} = 0,25$$

Sostituendo nell’espressione precedente:

(x − 12) : 8 = f(x) : f(20);

$$f(x) = \left(\frac{1}{8}x - \frac{12}{8}\right) * 0,25$$

quindi:

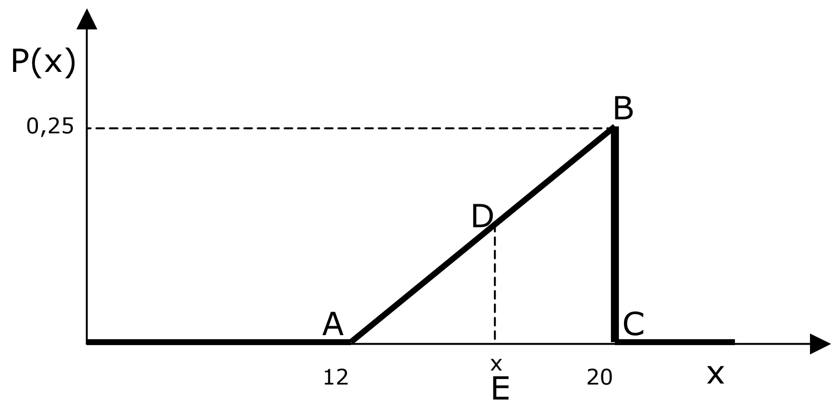
$$f(x) = 0,03125\ x - 0,375$$

Tale funzione esprime la probabilità che la batteria abbia una durata pari ad x, supposto che non si sia esaurita fino ad x.
Dalla funzione di densità di probabilità f(x) si deduce che, coerentemente con quanto affermato prima:

$$f(12) = 0,03125 \times 12 - 0,375 = 0$$

ossia che la batteria non si scarica prima di 12 ore.
Inoltre, f(x) raggiunge il suo valore massimo in corrispondenza dell’ascissa x = 20, che vale precisamente:

$$f(20) = 0,03125 \times 20 - 0,375 = 0,25$$



ESERCIZIO 3.6

Il numero di giorni intercorrenti tra la fatturazione ed il pagamento dei conti aperti di un grande magazzino segue una distribuzione Normale con una media di 18 giorni ed una scarto quadratico medio di 4 giorni.
Quale percentuale di fatture verrà saldata:
a) tra i 12 e 18 giorni;
b) entro 8 giorni;
c) in più di 12 giorni;
d) entro quanti giorni verrà saldato il 99,5% delle fatture?

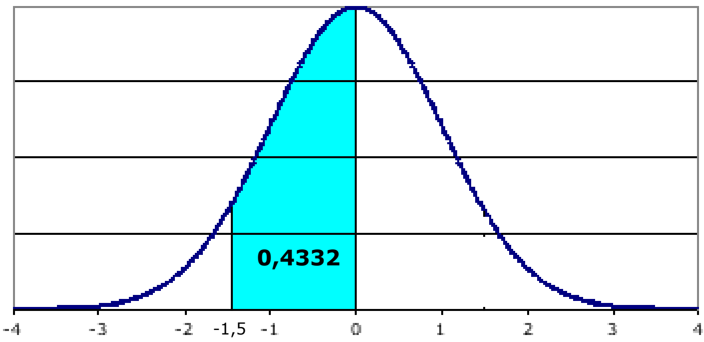
<u>Soluzione</u>

$$X \sim N(18, 16)$$

a)

$$P(12 \le X \le 18) = P\left(\frac{12-18}{4} \le Z \le \frac{18-18}{4}\right) = P(-1{,}5 \le Z \le 0) =$$

$$= P(0 \le Z \le 1{,}5) = 0{,}4332$$

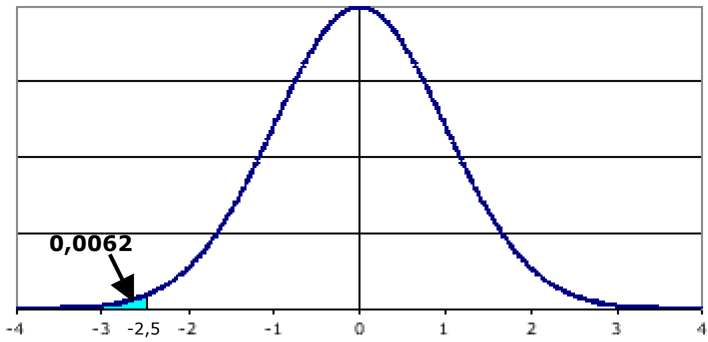


	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
1,4	0,4192	0,4207	0,4222	0,4236	0,4251	0,4265	0,4279	0,4292	0,4306	0,4319
1,5	**0,4332**	0,4345	0,4357	0,4370	0,4382	0,4394	0,4406	0,4418	0,4429	0,4441
1,6	0,4452	0,4463	0,4474	0,4484	0,4495	0,4505	0,4515	0,4525	0,4535	0,4545
1,7	0,4554	0,4564	0,4573	0,4582	0,4591	0,4599	0,4608	0,4616	0,4625	0,4633
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...

b)

$$P(X \le 8) = P\left(Z \le \frac{8-18}{4}\right) = P(Z \le -2{,}5) = 0{,}5 - P(Z \le 2{,}5) =$$

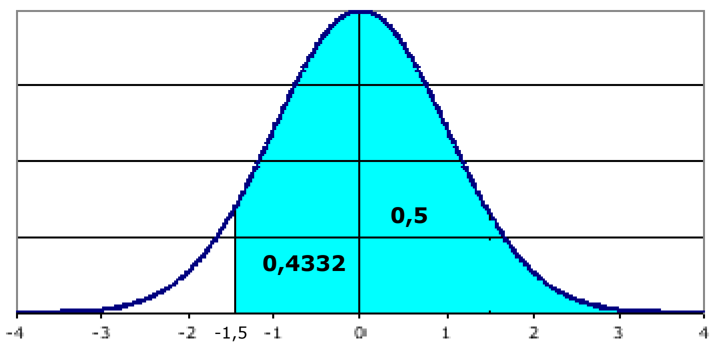
$$= 0{,}5 - 0{,}4938 = 0{,}0062$$



	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
2,4	0,4918	0,4920	0,4922	0,4925	0,4927	0,4929	0,4931	0,4932	0,4934	0,4936
2,5	**0,4938**	0,4940	0,4941	0,4943	0,4945	0,4946	0,4948	0,4949	0,4951	0,4952
2,6	0,4953	0,4955	0,4956	0,4957	0,4959	0,4960	0,4961	0,4962	0,4963	0,4964
2,7	0,4965	0,4966	0,4967	0,4968	0,4969	0,4970	0,4971	0,4972	0,4973	0,4974
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...

c)

$P(X > 12) = P(Z > -1{,}5) = 0{,}5 + P(0 \le Z \le 1{,}5) = 0{,}5 + 0{,}4332 = 0{,}9332$



d)

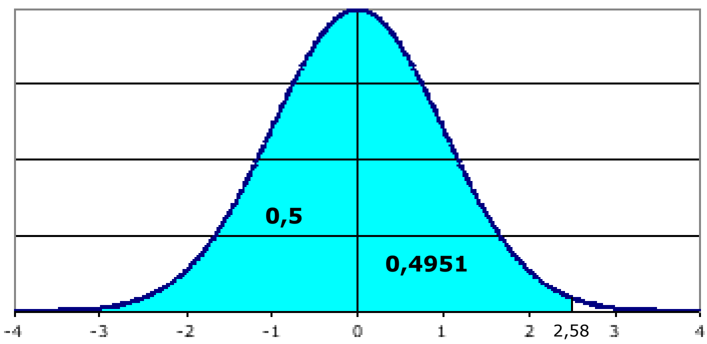
Si ricerca quel valore x* di X tale che $P(X \leq x^*) = 0{,}995$.

Sulla tavola si cercherà il valore $z_{0,005}$ che lascia alla sua destra un'area pari a 0,005 e che è l'ascissa corrispondente al valore di probabilità più prossimo a 0,995 – 0,5 = 0,495

	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
2,3	0,4893	0,4896	0,4898	0,4901	0,4904	0,4906	0,4909	0,4911	0,4913	0,4916
2,4	0,4918	0,4920	0,4922	0,4925	0,4927	0,4929	0,4931	0,4932	0,4934	0,4936
2,5	0,4938	0,4940	0,4941	0,4943	0,4945	0,4946	0,4948	**0,4949**	**0,4951**	0,4952
2,6	0,4953	0,4955	0,4956	0,4957	0,4959	0,4960	0,4961	0,4962	0,4963	0,4964
2,7	0,4965	0,4966	0,4967	0,4968	0,4969	0,4970	0,4971	0,4972	0,4973	0,4974
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...

In tal caso i due valori 0,4949 e 0,4951 sono equidistanti dal valore cercato 0,4950. Premesso che la scelta dell'uno o dell'altro è pressoché equivalente, vista la natura del problema sarebbe il caso di preferire il valore maggiore, che ci cautela dal rischio di una seppur minima sottostima del tempo necessario:

$$x^* = \sigma\, z_{0,005} + \mu = 4 \times 2{,}58 + 18 = 28{,}32$$



Infine, è necessario convertire tale valore in un numero intero. Si richiede il tempo *entro* il quale le fatture saranno saldate; essendo 28,32 > 28 vuole dire che il tempo necessario è maggiore di 28 giorni, quindi la risposta è 29 giorni.

ESERCIZIO 3.7

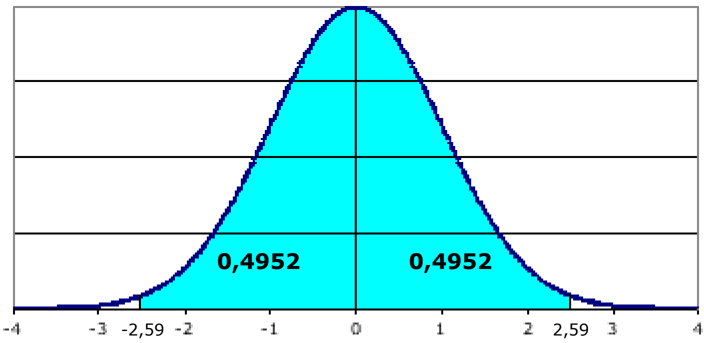
Una partita di rondelle si distribuisce normalmente con una media di 0,0485 centimetri ed una scarto quadratico medio di 0,00108 centimetri. Si verifichi se ci si può aspettare che il 99,04% di queste rondelle abbia uno spessore compreso tra i 0,0457 e i 0,0513 centimetri.

Soluzione

$$X \sim N(0{,}0485;\ 0{,}00108^2)$$

Calcoliamo la probabilità che lo spessore sia compreso tra i 0,0457 e i 0,0513 e confrontiamo questa probabilità con la percentuale 99,04%.

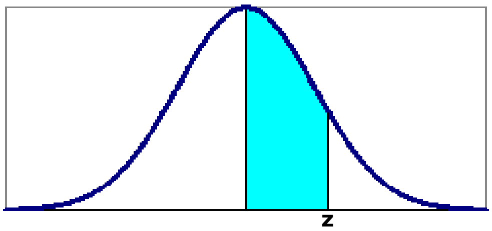
$$P(0{,}0457 \le X \le 0{,}0513) = P\left(\frac{0{,}0457 - 0{,}0485}{0{,}00108} \le Z \le \frac{0{,}0513 - 0{,}0485}{0{,}00108}\right) =$$
$$= P(-2{,}59 \le Z \le 2{,}59) = 2 \times P(Z \le 2{,}59) = 2 \times 0{,}4952 = 0{,}9904$$



	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
2,3	0,4893	0,4896	0,4898	0,4901	0,4904	0,4906	0,4909	0,4911	0,4913	0,4916
2,4	0,4918	0,4920	0,4922	0,4925	0,4927	0,4929	0,4931	0,4932	0,4934	0,4936
2,5	0,4938	0,4940	0,4941	0,4943	0,4945	0,4946	0,4948	0,4949	0,4951	**0,4952**
2,6	0,4953	0,4955	0,4956	0,4957	0,4959	0,4960	0,4961	0,4962	0,4963	0,4964
2,7	0,4965	0,4966	0,4967	0,4968	0,4969	0,4970	0,4971	0,4972	0,4973	0,4974
2,8	0,4974	0,4975	0,4976	0,4977	0,4977	0,4978	0,4979	0,4979	0,4980	0,4981
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...

La probabilità trovata è proprio uguale alla percentuale di 99,04%.

ALLEGATO: Tavola della Normale standard: P(0 ≤ Z ≤ z)



	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,0000	0,0040	0,0080	0,0120	0,0160	0,0199	0,0239	0,0279	0,0319	0,0359
0,1	0,0398	0,0438	0,0478	0,0517	0,0557	0,0596	0,0636	0,0675	0,0714	0,0753
0,2	0,0793	0,0832	0,0871	0,0910	0,0948	0,0987	0,1026	0,1064	0,1103	0,1141
0,3	0,1179	0,1217	0,1255	0,1293	0,1331	0,1368	0,1406	0,1443	0,1480	0,1517
0,4	0,1554	0,1591	0,1628	0,1664	0,1700	0,1736	0,1772	0,1808	0,1844	0,1879
0,5	0,1915	0,1950	0,1985	0,2019	0,2054	0,2088	0,2123	0,2157	0,2190	0,2224
0,6	0,2257	0,2291	0,2324	0,2357	0,2389	0,2422	0,2454	0,2486	0,2517	0,2549
0,7	0,2580	0,2611	0,2642	0,2673	0,2704	0,2734	0,2764	0,2794	0,2823	0,2852
0,8	0,2881	0,2910	0,2939	0,2967	0,2995	0,3023	0,3051	0,3078	0,3106	0,3133
0,9	0,3159	0,3186	0,3212	0,3238	0,3264	0,3289	0,3315	0,3340	0,3365	0,3389
1,0	0,3413	0,3438	0,3461	0,3485	0,3508	0,3531	0,3554	0,3577	0,3599	0,3621
1,1	0,3643	0,3665	0,3686	0,3708	0,3729	0,3749	0,3770	0,3790	0,3810	0,3830
1,2	0,3849	0,3869	0,3888	0,3907	0,3925	0,3944	0,3962	0,3980	0,3997	0,4015
1,3	0,4032	0,4049	0,4066	0,4082	0,4099	0,4115	0,4131	0,4147	0,4162	0,4177
1,4	0,4192	0,4207	0,4222	0,4236	0,4251	0,4265	0,4279	0,4292	0,4306	0,4319
1,5	0,4332	0,4345	0,4357	0,4370	0,4382	0,4394	0,4406	0,4418	0,4429	0,4441
1,6	0,4452	0,4463	0,4474	0,4484	0,4495	0,4505	0,4515	0,4525	0,4535	0,4545
1,7	0,4554	0,4564	0,4573	0,4582	0,4591	0,4599	0,4608	0,4616	0,4625	0,4633
1,8	0,4641	0,4649	0,4656	0,4664	0,4671	0,4678	0,4686	0,4693	0,4699	0,4706
1,9	0,4713	0,4719	0,4726	0,4732	0,4738	0,4744	0,4750	0,4756	0,4761	0,4767
2,0	0,4772	0,4778	0,4783	0,4788	0,4793	0,4798	0,4803	0,4808	0,4812	0,4817
2,1	0,4821	0,4826	0,4830	0,4834	0,4838	0,4842	0,4846	0,4850	0,4854	0,4857
2,2	0,4861	0,4864	0,4868	0,4871	0,4875	0,4878	0,4881	0,4884	0,4887	0,4890
2,3	0,4893	0,4896	0,4898	0,4901	0,4904	0,4906	0,4909	0,4911	0,4913	0,4916
2,4	0,4918	0,4920	0,4922	0,4925	0,4927	0,4929	0,4931	0,4932	0,4934	0,4936
2,5	0,4938	0,4940	0,4941	0,4943	0,4945	0,4946	0,4948	0,4949	0,4951	0,4952
2,6	0,4953	0,4955	0,4956	0,4957	0,4959	0,4960	0,4961	0,4962	0,4963	0,4964
2,7	0,4965	0,4966	0,4967	0,4968	0,4969	0,4970	0,4971	0,4972	0,4973	0,4974
2,8	0,4974	0,4975	0,4976	0,4977	0,4977	0,4978	0,4979	0,4979	0,4980	0,4981
2,9	0,4981	0,4982	0,4982	0,4983	0,4984	0,4984	0,4985	0,4985	0,4986	0,4986
3,0	0,4987	0,4987	0,4987	0,4988	0,4988	0,4989	0,4989	0,4989	0,4990	0,4990
3,1	0,4990	0,4991	0,4991	0,4991	0,4992	0,4992	0,4992	0,4992	0,4993	0,4993
3,2	0,4993	0,4993	0,4994	0,4994	0,4994	0,4994	0,4994	0,4995	0,4995	0,4995
3,3	0,4995	0,4995	0,4995	0,4996	0,4996	0,4996	0,4996	0,4996	0,4996	0,4997
3,4	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4998
3,5	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998
3,6	0,4998	0,4998	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999
3,7	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999
3,8	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999
3,9	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000
4,0	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000