ESERCIZIO 2.1

Sia X la variabile casuale che descrive il risultato del lancio di 2 dadi, sulle cui facce vi sono i numeri: 5, 5, 7, 7, 9, 9.

a) Definire la distribuzione di probabilità di X;
b) rappresentare X graficamente;
c) calcolare valore atteso, varianza e asimmetria di X.

<u>Soluzione</u>

a)
La variabile casuale X è uguale alla somma delle due variabili casuali X_1 e X_2:

$$X = X_1 + X_2$$

ciascuna delle quali può assumere 3 possibili valori.
Considerando, quindi, che la probabilità per ciascun valore di X_1 e X_2 è:

$$P(5) = P(7) = P(9) = 1/3,$$

la probabilità per ciascuna coppia di valori di X_1 e X_2 è sempre uguale a:

$$P(x_{1i} \cap x_{2j}) = \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9} = 0,\bar{1}$$

$\forall$ i, j = 1, 2, 3.

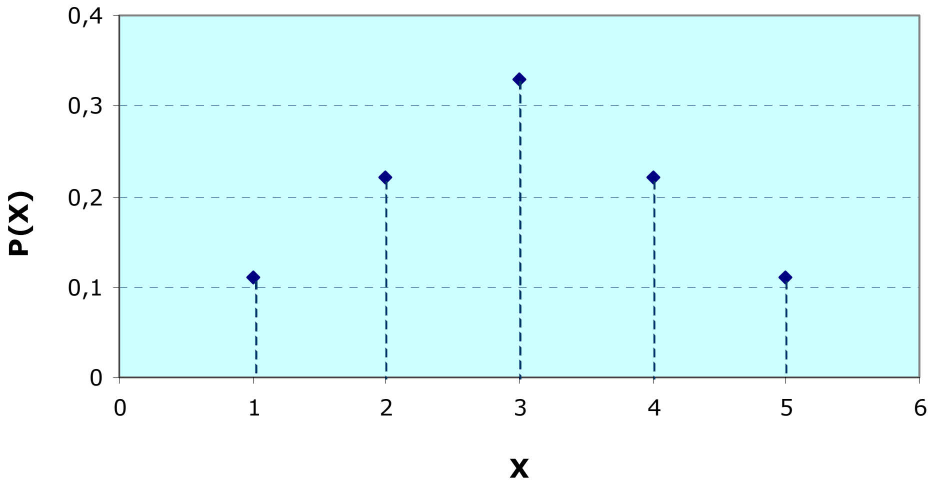
Di fatti, il lancio dei due dadi può dar luogo ai $3^2 = 9$ seguenti risultati:

dado 1 X_1	dado 2 X_2	somma X
5	5	10
5	7	12
5	9	14
7	5	12
7	7	14
7	9	16
9	5	14
9	7	16
9	9	18

In conclusione, la distribuzione di probabilità di X è la seguente:

x_i	$P(x_i)$	
10	$0,\bar{1}$	$1 \times 0,\bar{1}$
12	$0,\bar{2}$	$2 \times 0,\bar{1}$
14	$0,\bar{3}$	$3 \times 0,\bar{1}$
16	$0,\bar{2}$	$2 \times 0,\bar{1}$
18	$0,\bar{1}$	$1 \times 0,\bar{1}$
	1	

b)
La rappresentazione grafica di X è la seguente:



c)

$$E(X) = \sum_i x_i P(x_i) = 10 \times 0,\bar{1} + 12 \times 0,\bar{2} + 14 \times 0,\bar{3} + 16 \times 0,\bar{2} + 18 \times 0,\bar{1} =$$

$$= 1,11 + 2,67 + 4,67 + 3,56 + 2 = 14$$

$$\sigma^2 = E(X - \mu)^2 = \sum_i (x_i - \mu)^2 P(x_i) =$$

$$= (10-14)^2 \times 0,\bar{1} + (12-14)^2 \times 0,\bar{2} + (14-14)^2 \times 0,\bar{3} +$$

$$+(16-14)^2 \times 0,\bar{2} + (18-14)^2 \times 0,\bar{1} = 1,78 + 0,89 + 0 + 0,89 + 1,78 = 5,33$$

$\sigma = 2,31$

$$\bar{\bar{\mu}}_3 = E\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)^3 = \frac{\sum_i (x_i - \mu)^3 P(x_i)}{\sigma^3} =$$

$$= \frac{1}{\sigma^3}\left[(10-14)^3 \times 0,\bar{1} + (12-14)^3 \times 0,\bar{2} + (14-14)^3 \times 0,\bar{3} + +(16-14)^3 \times 0,\bar{2} + (18-14)^3 \times 0,\bar{1}\right]$$

$$= \frac{1}{2,31^3}\left[(-64 \times 0,\bar{1}) + (-8 \times 0,\bar{2}) + (0 \times 0,\bar{3}) + (8 \times 0,\bar{2}) + (64 \times 0,\bar{1})\right] = 0$$

ESERCIZIO 2.2

Il dirigente di un'azienda ha preposto tre dipendenti per ciascuno ufficio, per garantirne la copertura. Durante un epidemia di influenza, egli vuole conoscere qual è la probabilità che un ufficio resti deserto.
Sapendo che il virus influenzale si diffonde con un tasso di incidenza pari a 0,7:

a) si definisca la variabile casuale X che descrive il numero di malati in ciascun ufficio con la relativa distribuzione di probabilità;
b) si calcoli il numero medio di malati per ufficio;
c) si calcoli la varianza di X;
d) si rappresenti X graficamente.

<u>Soluzione</u>

a)
La situazione può essere ricondotta allo schema teorico del lancio di 3 monete, che da luogo a 2^3 = 8 possibili risultati, in cui gli eventi "testa" e "croce" sono sostituiti dagli eventi "sano" e "malato", ciascuno con la sua probabilità:

1	**2**	**3**	**Numero di malati**
S	S	S	0
S	S	M	1
S	M	S	1
S	M	M	2
M	S	S	1
M	S	M	2
M	M	S	2
M	M	M	3

Inoltre, considerando che per ciascun dipendente la probabilità di contrarre la malattia è pari a 0,7, ed ipotizzando l'indipendenza dello stato di salute tra i dipendenti, è possibile procedere al calcolo delle probabilità associate ai diversi valori che X può assumere:

$P(S \cap S \cap S) = 0,3^3 = 0,027$
$P(S \cap S \cap M) = P(S \cap M \cap S) = P(M \cap S \cap S) = 0,7 \times 0,3 \times 0,3 = 0,063$
$P(S \cap M \cap M) = P(M \cap S \cap M) = P(M \cap M \cap S) = 0,7 \times 0,7 \times 0,3 = 0,147$
$P(M \cap M \cap M) = 0,7^3 = 0,343$

La variabile casuale X segue, pertanto, la seguente distribuzione di probabilità:

x_i	$P(x_i)$	
0	0,027	$1 \times 0,027$
1	0,189	$3 \times 0,063$
2	0,441	$3 \times 0,147$
3	0,343	$1 \times 0,343$
	1	

b)
Il numero medio di malati per ufficio è dato dal valore atteso di X:

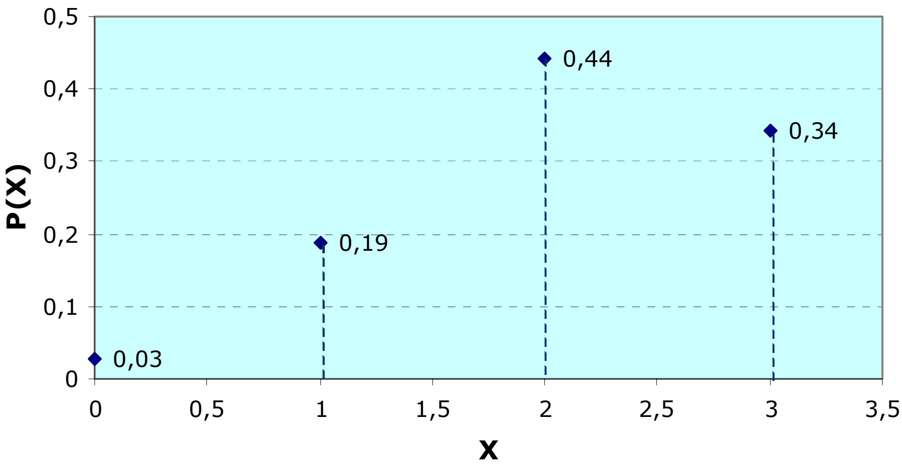
$$E(X) = \sum_i x_i P(x_i) = 0 + 1 \times 0,189 + 2 \times 0,441 + 3 \times 0,343 = 2,1$$

c)
La varianza di X è:

$$\sigma^2 = E(X - \mu)^2 = \sum_i (x_i - \mu)^2 P(x_i) = (0 - 2,1)^2 \times 0,027 + (1 - 2,1)^2 \times 0,189 +$$

$$+ (2 - 2,1)^2 \times 0,441 + (3 - 2,1)^2 \times 0,343 = 0,63$$

d)



ESERCIZIO 2.3

Dal registro delle vendite di un rivenditore di automobili risulta che il numero di auto vendute in ciascuna delle 500 giornate lavorative considerate ha il seguente andamento:

auto vendute	frequenza
0	40
1	100
2	142
3	66
4	36
5	30
6	26
7	20
8	16
9	14
10	8
11	2
totale	500

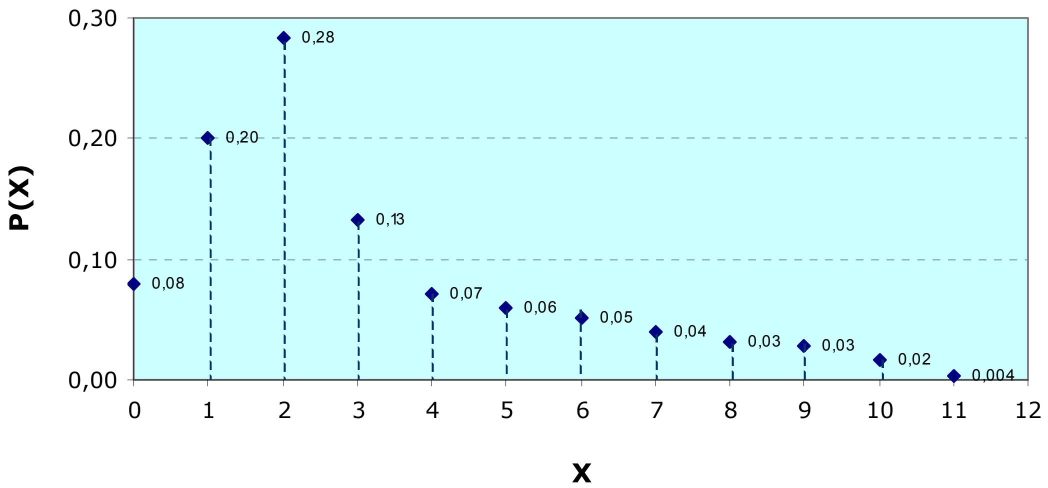
a) Si definisca la distribuzione di probabilità della variabile casuale X = numero di auto vendute quotidianamente e la si rappresenti graficamente;
b) si calcoli il numero atteso di automobili vendute quotidianamente;
c) si calcoli lo scarto quadratico medio di X;
d) qual è la probabilità che in una data giornata si vendano:

1) meno di 4 automobili;
2) al massimo 4 automobili;
3) almeno 4 automobili;
4) esattamente 4 automobili;
5) più di 4 automobili.

<u>Soluzione</u>

a)
Le probabilità per i diversi valori di X possono essere calcolati come frequenza relative. La variabile casuale X ha, dunque, la seguente distribuzione di probabilità:

x_i	$P(x_i)$
0	0,08
1	0,2
2	0,284
3	0,132
4	0,072
5	0,06
6	0,052
7	0,04
8	0,032
9	0,028
10	0,016
11	0,004
	1



b)

$E(X) = \sum_i x_i P(x_i) = 0 + 1 \times 0,2 + 2 \times 0,284 + 3 \times 0,132 + \ldots + 11 \times 0,004 = 3,052$

c)

$\sigma^2 = E(X - \mu)^2 = \sum_i (x_i - \mu)^2 P(x_i) =$

$0 + (1 - 3,052)^2 \times 0,2 + (2 - 3,052)^2 \times 0,284 + (3 - 3,052)^2 \times 0,132 + \ldots + (11 - 3,052)^2 \times 0,004 =$
$= 6,01$

$\sigma = 2,45$

d)

1) $P(X < 4) = P[(X=0) \cup (X=1) \cup (X=2) \cup (X=3)] =$
$= 0,08 + 0,2 + 0,284 + 0,132 = 0,7$

2) $P(X \leq 4) = P[(X=0) \cup (X=1) \cup (X=2) \cup (X=3) \cup (X=4)] =$
$= 0,08 + 0,2 + 0,284 + 0,132 + 0,072 = 0,77$

3) $P(X \geq 4) = P[(X=4) \cup (X=5) \cup \ldots \cup (X=11)] =$
$= 0,072 + 0,06 + 0,052 + 0,04 + 0,032 + 0,028 + 0,016 + 0,004 = 0,3$
$= 1 - P(X < 4)$

4) $P(X = 4) = P(4) = 0,072$

5) $P(X > 4) = P[(X=5) \cup (X=6) \cup \ldots \cup (X=11)] =$
$= 0,06 + 0,052 + 0,04 + 0,032 + 0,028 + 0,016 + 0,004 = 0,23$
$= 1 - P(X \leq 4)$

ESERCIZIO 2.4

Si consideri il gioco, legato al lancio di una coppia di dadi regolari, in cui si perde 1 € se si ottiene un punteggio pari a 5, 6, 7 o 8; si vince 1 € se si ottiene 3, 4, 9, 10 o 11; si vincono 2 € se si ottiene 2 o 12.

a) si definisca la distribuzione di probabilità della variabile casuale X = risultato della scommessa;
b) si calcolino la vincita (o perdita) media e la varianza di X;

Soluzione

a)
La variabile casuale X può assumere i valori: -1, 1, 2, associati ai possibili risultati del lancio come segue:

e_i	x_i
$5 \cup 6 \cup 7 \cup 8$	-1
$3 \cup 4 \cup 9 \cup 10 \cup 11$	+1
$2 \cup 12$	+2

Le probabilità delle x_i vengono, pertanto, calcolate come probabilità degli e_i.

Dado 1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	3	3	3	3	3	3	4	4	4	4	4	4	5	5	5	5	5	5	6	6	6	6	6	6
Dado 2	1	2	3	4	5	6	1	2	3	4	5	6	1	2	3	4	5	6	1	2	3	4	5	6	1	2	3	4	5	6	1	2	3	4	5	6
Somma	2	3	4	5	6	7	3	4	5	6	7	8	4	5	6	7	8	9	5	6	7	8	9	10	6	7	8	9	10	11	7	8	9	10	11	12

Le probabilità dei possibili valori s_i della somma dei due dadi sono:

s_i	$P(s_i)$
2	1/36
3	2/36
4	3/36
5	4/36
6	5/36
7	6/36
8	5/36
9	4/36
10	3/36
11	2/36
12	1/36

Da cui si ricava:

$$P(5 \cup 6 \cup 7 \cup 8) = \frac{4}{36} + \frac{5}{36} + \frac{6}{36} + \frac{5}{36} = \frac{20}{36} = 0,55$$

$$P(3 \cup 4 \cup 9 \cup 10 \cup 11) = \frac{2}{36} + \frac{3}{36} + \frac{4}{36} + \frac{3}{36} + \frac{2}{36} = \frac{14}{36} = 0,39$$

$$P(2 \cup 12) = \frac{1}{36} + \frac{1}{36} = \frac{2}{36} = 0,06 .$$

La distribuzione di probabilità di X è, dunque:

x_i	$P(x_i)$
-1	0,55
+1	0,39
+2	0,06
	1

b)
La media di X è pari a:

$$E(X) = \sum_i x_i P(x_i) = (-1 \times 0,55) + (1 \times 0,39) + (2 \times 0,06) = -\ 0,06$$

ossia il gioco comporta in media una perdita per il giocatore.

La varianza di X è:

$$\sigma^2 = E(X - \mu)^2 = \sum_i (x_i - \mu)^2 P(x_i) = (-1 + 0,06)^2 \times 0,55 + (1 + 0,06)^2 \times 0,39 +$$
$$+ (2 + 0,06)^2 \times 0,06) = 1,16$$

ESERCIZIO 2.5

In un cassetto ci sono 10 pile di cui 7 funzionanti e 3 esaurite. Viene presa a caso una prima pila e poi, dopo aver reintrodotto questa nel cassetto, una seconda.

1) Qual è la probabilità che le due pile siano:
- **1.a)** entrambe funzionanti (evento A);
- **1.b)** entrambe esaurite (evento B);
- **1.c)** una funzionante ed una esaurita (evento C).

2) Viene estratta una terza pila: qual è la probabilità di avere due pile funzionanti ed una esaurita (evento D)?

3) Si calcolino P(A), P(B), P(C) e P(D) nell'ipotesi che le estrazioni avvengano *senza ripetizione*;

4) Costruire e rappresentare la variabile casuale X = "numero di pile funzionanti" (per entrambi i tipi di estrazione).

<u>Soluzione</u>

1)

Nello schema dell'estrazione con ripetizione le probabilità restano costanti ad ogni prova.
Se si indica con F l'evento "estrazione di una pila funzionante" e con E l'evento estrazione di una pila esaurita", si ha che:

$$P(F) = 7/10$$
e
$$P(E) = 3/10$$

1.a)

Essendo le estrazioni indipendenti,

$$P(A) = P(F) \times P(F) = 49/100 = 0{,}49.$$

D'altra parte se rappresentiamo l'insieme dei possibili risultati dell'esperimento in una tabella a doppia entrata, è immediato dedurre P(A) anche come rapporto tra casi favorevoli e casi possibili.

	F	F	F	F	F	F	F	E	E	E
F	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0
F	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0
F	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0
F	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0
F	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0
F	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0
F	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0
E	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
E	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
E	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Risultati possibili: 100

Risultati favorevoli: 49

1.b)
Allo stesso modo, P(B) sarà uguale a:

$P(B) = P(E) \times P(E) = 9/100 = 0,09.$

	F	F	F	F	F	F	F	E	E	E
F	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
F	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
F	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
F	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
F	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
F	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
F	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
E	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1
E	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1
E	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1

Risultati possibili: 100

Risultati favorevoli: 9

1.c)
La coppia tra una pila funzionante ed una esaurita può risultare dall'unione degli eventi: "prima pila funzionante – seconda pila esaurita" e "prima pila esaurita – seconda pila funzionante"

$$P(C) = P(F) \times P(E) + P(E) \times P(F) = (7/10 \times 3/10) \times 2 = 21/100 \times 2 = 0,42.$$

	F	F	F	F	F	F	F	E	E	E
F	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1
F	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1
F	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1
F	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1
F	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1
F	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1
F	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1
E	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0
E	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0
E	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0

Risultati possibili: 100

Risultati favorevoli: 42

2)
La combinazione di "due pile funzionanti ed una esaurita" può derivare da 3 differenti estrazioni:

F	F	E
F	E	F
E	F	F

Quindi:

$$P(D) = 3 \times P(F) \times P(F) \times P(E) = 3 \times \frac{7}{10} \times \frac{7}{10} \times \frac{3}{10} = \frac{441}{1000} = 0,44 .$$

3)
Dal momento che nello schema senza ripetizione le probabilità non restano costanti in ogni prova, è utile distinguere con un pedice i risultati delle 3 estrazioni.

3.a)

$$P(A) = P(F_1) \times P(F_2|F_1) = \frac{7}{10} \times \frac{6}{9} = \frac{7}{15} = 0,47.$$

3.b)

$$P(B) = P(E_1) \times P(E_2|E_1) = \frac{3}{10} \times \frac{2}{9} = \frac{1}{15} = 0,06.$$

3.c)

$$P(C) = P(E_1) \times P(F_2|E_1) + P(F_1) \times P(E_2|F_1) = \frac{3}{10} \times \frac{7}{9} + \frac{7}{10} \times \frac{3}{9} = \frac{7}{15} = 0,47$$

3.d)
Ricordando lo schema precedente:

1	2	3
F	F	E
F	E	F
E	F	F

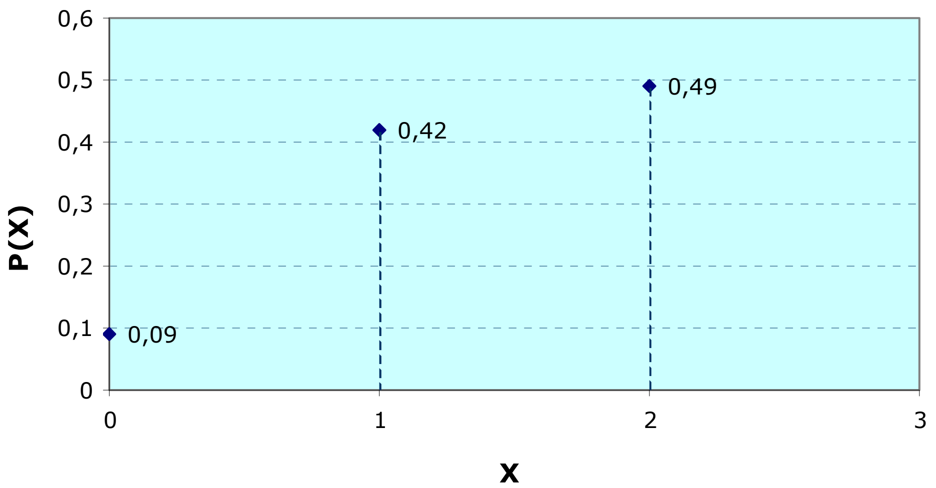
$$P(D) = P(F_1 \cap F_2 \cap E_3) + P(F_1 \cap E_2 \cap F_3) + P(E_1 \cap F_2 \cap F_3) =$$

$$= P(F_1) \times P(F_2 \mid F_1) \times P(E_3 \mid F_1 \cap F_2) +$$
$$+ P(F_1) \times P(E_2 \mid F_1) \times P(F_3 \mid F_1 \cap E_2) +$$
$$+ P(E_1) \times P(F_2 \mid E_1) \times P(F_3 \mid F_2 \cap E_1) =$$

$$= \frac{7}{10} \times \frac{6}{9} \times \frac{3}{8} + \frac{7}{10} \times \frac{3}{9} \times \frac{6}{8} + \frac{3}{10} \times \frac{7}{9} \times \frac{6}{8} = \frac{7}{40} + \frac{7}{40} + \frac{7}{40} = 0,525$$

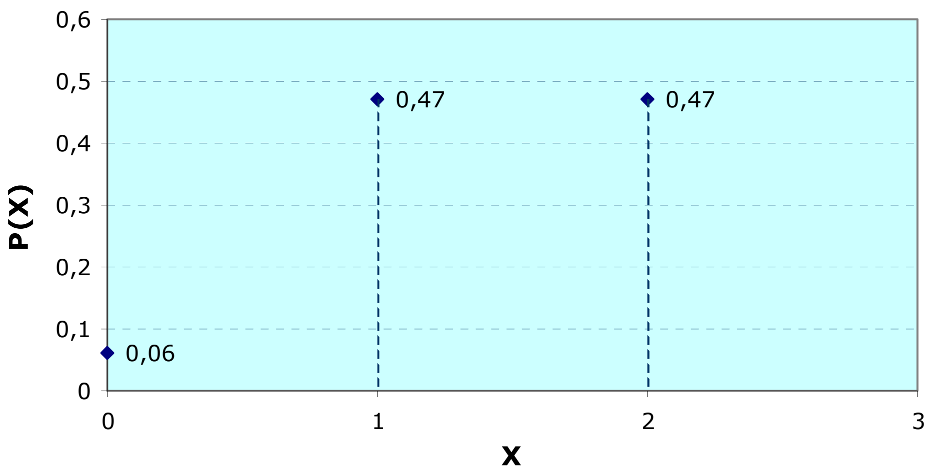
4)
La variabile casuale X = numero di pile funzionanti può assumere i valori 0, 1 o 2, le cui probabilità sono differenti a seconda del tipo di estrazione.
Nell'estrazione con ripetizione la distribuzione di X è la seguente:

e_i	x_i	$P(x_i)$
B	0	0,09
C	1	0,42
A	2	0,49
		1



Per l'estrazione senza ripetizione, invece, le probabilità sono le seguenti:

e_i	x_i	$P(x_i)$
B	0	0,06
C	1	0,47
A	2	0,47
		1



ESERCIZIO 2.6

Alle prove eliminatorie di un torneo partecipano A, B e C, che hanno probabilità di accedere alla prova finale pari, rispettivamente, a ½, 1/5 e 1/10. Ipotizzando l'indipendenza delle ammissioni, qual è la probabilità che si verifichino i seguenti eventi:

a) E = {alla prova finale accedono A e B} (prescindendo dalla sorte di C);
b) F = {alla prova finale accede *almeno* una delle tre squadre};
c) G = {alla prova finale accede esattamente una delle tre squadre};
d) Costruire e rappresentare la variabile casuale X = "numero di squadre che accedono alla prova finale".

Soluzione

P(A) = ½ = 0,5
P(B) = 1/5 = 0,2
P(C) = 1/10 = 0,1

a)
$P(E) = P(A \cap B) = P(A) \times P(B) = 0{,}5 \times 0{,}2 = 0{,}1$

b)
$$P(F) = P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C) = \frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{10}-\frac{1}{2}\times\frac{1}{5}-\frac{1}{2}\times\frac{1}{10}-\frac{1}{5}\times\frac{1}{10}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{5}\times\frac{1}{10}=\frac{64}{100}=0{,}64.$$

c)
$$P(G) = P(A \cup B \cup C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + 2P(A \cap B \cap C) = \frac{64}{100}-\frac{1}{10}-\frac{1}{50}-\frac{1}{20}+2\frac{1}{100}=\frac{49}{100}=0{,}49.$$

d)
La variabile casuale X = "numero di squadre che accedono alla prova finale" è definita sull'insieme di valori $x_i \in \{1, 2, 3, 4\}$, le cui probabilità sono:

- $P(0) = P(\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}) = \left(1-\frac{1}{2}\right)\times\left(1-\frac{1}{5}\right)\times\left(1-\frac{1}{10}\right)=\frac{1}{2}\times\frac{4}{5}\times\frac{9}{10}=\frac{9}{25}=0{,}36$
- $P(1) = P(G) = 0{,}49$
- $P(2) = P(A \cap B) + P(A \cap C) + P(B \cap C) - 3P(A \cap B \cap C) = \frac{1}{10}+\frac{1}{50}+\frac{1}{20}-3\times\frac{1}{100}=0{,}77$
- $P(3) = P(A \cap B \cap C) = \frac{1}{2}\times\frac{1}{5}\times\frac{1}{10}=\frac{1}{100}=0{,}01$

La distribuzione di probabilità di X è dunque:

x_i	$P(x_i)$
0	0,36
1	0,49
2	0,77
3	0,01
	1