ESERCIZIO 1.1 *

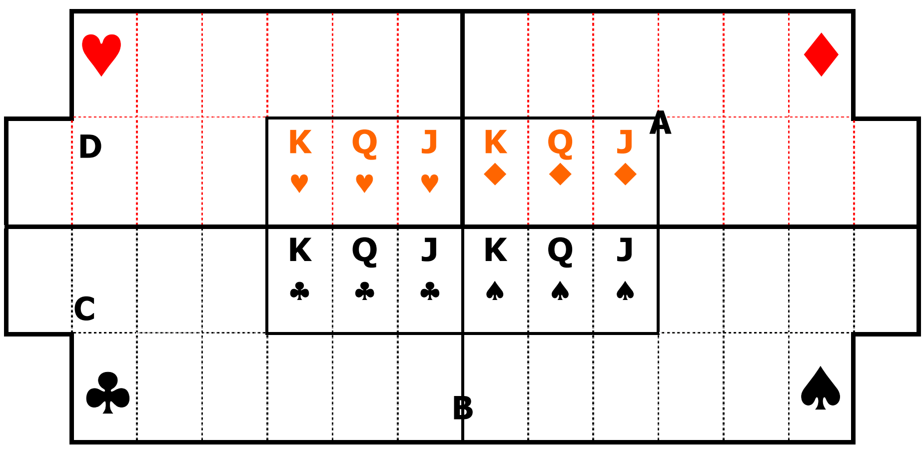
Si consideri un mazzo di carte da gioco francesi ed i seguenti eventi elementari:

A = {figura}
B = {carta nera}
C = {carta di fiori}
D = {carta di cuori}

Si determini la probabilità che, estraendo a caso 1 carta:
a) sia una figura nera;
b) sia una figura di cuori;
c) sia una carta dall'asso al 10 nera;
d) si verifichi A o B o C;
e) si verifichi l'unione di $\overline{A}$, $\overline{B}$, $\overline{C}$;
f) sia una carta di cuori o fiori.

<u>Soluzione</u>

L'estrazione di una carta da un mazzo determina una partizione della spazio degli eventi, che può essere rappresentato, insieme con i 4 eventi A, B, C, D, in un diagramma di Eulero-Venn come segue:



Le probabilità elementari sono:

P(A)	P(*figura*)	12/52	0,23
P(B)	P(*carta nera*)	26/52	0,50
P(C)	P(*carta di fiori*)	13/52	0,25
P(D)	P(*carta di cuori*)	13/52	0,25

a)
L'estrazione di una figura nera è data dall'intersezione dei due eventi A e B. La sua probabilità può essere, dunque, ottenuta a partire dalle probabilità condizionate ed è pari a:

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B|A) = 12/52 \times 6/12 = 6/52 = 0{,}12;$$
$$= P(B) \times P(A|B) = 26/52 \times 6/26 = 6/52 = 0{,}12,$$

b)
Lo stesso vale per la probabilità di ottenere una figura di cuori, pari a:

$$P(A \cap D) = P(A) \times P(D|A) = 12/52 \times 3/12 = 3/52 = 0{,}05;$$
$$= P(D) \times P(A|D) = 13/52 \times 3/13 = 3/52 = 0{,}05.$$

c)
La probabilità di estrarre una carta dall'asso al 10 nera può essere calcolata come
$P(B \cap \overline{A})$, che, per il 1° teorema del Calcolo delle probabilità, è pari a:

$$P(B \cap \overline{A}) = P(B) - P(A \cap B) = 26/52 - 6/52 = 20/52 = 0{,}38.$$

d)
La probabilità che si verifichi A o B o C è $P(A \cup B \cup C)$, che, grazie al 4° teorema del Calcolo delle probabilità, può essere calcolata come:

$$P(A \cup B \cup C) =$$
$$= P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(B \cap C) - P(A \cap C) + P(A \cap B \cap C) =$$
$$= \frac{12}{52} + \frac{26}{52} + \frac{13}{52} - \frac{6}{52} - \frac{3}{52} - \frac{13}{52} + \frac{3}{52} = \frac{32}{52} = 0{,}62$$

e)
Per le leggi di De Morgan, l'unione di non A, non B, non C è pari alla negazione della loro intersezione:

$$\overline{A} \cup \overline{B} = \overline{A \cap B}$$

quindi

$$P(\overline{A} \cup \overline{B}) = P(\overline{A \cap B}) = 1 - P(A \cap B) = 1 - \frac{6}{52} = \frac{46}{52} = 0{,}88.$$

f)
$P(C \cup D) = P(C) + P(D) = ½$.

ESERCIZIO 1.2 *

La produzione di pneumatici in una fabbrica avviene in tre turni: il 50% di giorno – il 30% di sera – il 20% di notte. Il controllo della conformità dei pneumatici prodotti si basa su un campione di 200 pezzi, ripartiti secondo le proporzioni dei 3 turni di produzione, che ha rivelato ciò che segue:

		TURNO DI PRODUZIONE			
		Giorno	*Sera*	*Notte*	totale
ESITO	*Conformità*	97	54	33	**184**
	Non conformità	3	6	7	**16**
	totale	**100**	**60**	**40**	**200**

1) Calcolare la probabilità che un pneumatico scelto a caso:

a) sia difettoso;
b) sia difettoso e prodotto in ciascuno dei 3 turni;
c) sia difettoso essendo stato prodotto in ciascuno dei 3 turni;
d) essendo difettoso sia stato prodotto in ciascuno dei 3 turni.

2) È lecito sostenere che la qualità del prodotto è influenzata dal turno di produzione?

<u>Soluzione</u>

1)
Le probabilità cercate possono essere ottenute dalla tabella delle frequenze relative:

		TURNO DI PRODUZIONE			
		Giorno (G)	*Sera (S)*	*Notte (N)*	totale
ESITO	*Conformità (C)*	0,485	0,27	0,165	**0,92**
	Non conformità (D)	0,015	0,03	0,035	**0,08**
	totale	**0,5**	**0,3**	**0,2**	**1**

a)
$P(D) = 0{,}08$

b)
b.1
$P(D \cap G) = 0{,}015$
b.2
$P(D \cap S) = 0{,}03$
b.3
$P(D \cap N) = 0{,}035$

c)
c.1

$$P(D|G) = \frac{P(D \cap G)}{P(G)} = \frac{0{,}015}{0{,}5} = 0{,}03$$

c.2

$$P(D|S) = \frac{P(D \cap S)}{P(S)} = \frac{0{,}03}{0{,}3} = 0{,}1$$

c.3

$$P(D|N) = \frac{P(D \cap N)}{P(N)} = \frac{0{,}035}{0{,}2} = 0{,}175$$

d)

d.1

$$P(G|D) = \frac{P(D \cap G)}{P(D)} = \frac{0{,}015}{0{,}08} = 0{,}1875$$

d.2

$$P(S|D) = \frac{P(D \cap S)}{P(D)} = \frac{0{,}03}{0{,}08} = 0{,}375$$

d.3

$$P(N|D) = \frac{P(D \cap N)}{P(D)} = \frac{0{,}035}{0{,}08} = 0{,}4375$$

2)

Se la qualità del prodotto non fosse influenzata dal turno di produzione, si avrebbe che:

$$P(D|G) = P(D|S) = P(D|N) = P(D)$$

ma evidentemente così non è.

ESERCIZIO 1.3

Per ciascuna delle seguenti coppie di eventi E, F, si stabilisca, in base alle informazioni date, se sono vere le proposizioni:

a) $P(E) = 1/3$; $P(F) = 2/3$; $P(E \cap F) = 2/9$;
E ed F sono indipendenti?

b) $P(E) = 1/4$; $P(F) = 1/2$; $P(\bar{E} \cap \bar{F}) = 7/8$;
$\bar{E}$ e $\bar{F}$ sono indipendenti?

c) $P(E) = 1/5$; $P(F) = 3/5$; $P(E \cup \bar{F}) = 3/5$;
E e $\bar{F}$ sono indipendenti?

d) $P(E) = 1/4$; $P(F) = 3/4$; $P(\bar{E} \cap F) = 9/16$.
$\bar{E}$ ed F sono indipendenti?

<u>Soluzione</u>

La condizione generale di indipendenza per due eventi A ed B può essere espressa mediante l'uguaglianza:

$$P(B|A) = P(B)$$

che implica

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B).$$

a)
In questo caso $P(E \cap F)$ è esattamente uguale a $P(E) \times P(F)$. Si può concludere che E ed F sono indipendenti.

b)
La condizione di indipendenza per $\bar{E}$ e $\bar{F}$ imporrebbe:

$$P(\bar{E} \cap \bar{F}) = P(\bar{E}) \times P(\bar{F}) = (1 - 1/4) \times (1 - 1/2) = 3/8$$

e non 7/8. $\bar{E}$ ed $\bar{F}$, dunque, non sono fra loro indipendenti.

c)
La probabilità dell'unione di due eventi A e B è data da:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

Visto che $P(E \cup \bar{F}) = P(E) + P(\bar{F})$, questo significa che $P(E \cap F) = 0$, ossia che E ed F sono due eventi incompatibili, quindi fra loro dipendenti.

d)
Seguendo la stessa logica del caso b, bisogna questa volta concludere per l'indipendenza:

$$P(\bar{E} \cap F)) = P(\bar{E}) \times P(F) = (1 - 1/4) \times 3/4) = 9/16$$

ESERCIZIO 1.4

Su 200 appezzamenti di terreno, dei quali 140 trattati con fertilizzanti, è stata piantata una graminacea, osservando, poi, la rispondenza del prodotto finale a specifici requisiti di qualità. I risultati sono riportati in tabella:

		Qualità delle graminacee		
		Conforme	*Non conforme*	totale
Trattamento	*Fertilizzante si*	112	28	**140**
	Fertilizzante no	25	35	**60**
	totale	**137**	**63**	**200**

a) Calcolare la probabilità che un appezzamento scelto a caso sia stato trattato con fertilizzanti.
b) Se è noto che un appezzamento è stato fertilizzato, qual è la probabilità che la graminacea cresciuta su di esso risponda ai requisiti prefissati?

Soluzione

Dalla tabella delle frequenze relative:

		Qualità delle graminacee		
		Conforme *(C)*	*Non conforme* *($\bar{C}$)*	totale
Trattamento	*Fertilizz. si (F)*	0,56	0,14	**0,7**
	Fertilizz. no ($\bar{F}$)	0,125	0,175	**0,3**
	totale	**0,685**	**0,315**	**1**

è possibile dedurre le probabilità desiderate. Più precisamente:

a)
P(F) = 0,7

b)

$$P(C|F) = \frac{P(C \cap F)}{P(F)} = \frac{0{,}56}{0{,}7} = 0{,}8$$

ESERCIZIO 1.5

La signora A porta sempre con sé occhiali da sole, mentre suo marito B li dimentica a casa con probabilità 1/3. Entrambi, inoltre, possono dimenticarli con probabilità $P(Dim_A) = 1/5$, per la signora A, e $P(Dim_B) = 1/4$, per suo marito B, in ognuno dei posti in cui si fermano.
A e B escono insieme e si fermano in 5 negozi: qual è la probabilità che, tornati a casa, entrambi abbiano gli occhiali?

<u>Soluzione</u>

L'evento E = {A e B tornano a casa con gli occhiali da sole} è costituito dall'intersezione dei due eventi elementari E_A = {A torna a casa con gli occhiali da sole} e E_B = {B torna a casa con gli occhiali da sole}, le cui probabilità possono essere calcolate come probabilità che A e B *non* dimentichino gli occhiali in nessun negozio.
Le probabilità per A e per B di *non* dimenticare gli occhiali in *ciascun* negozio sono rispettivamente:

$$P(NoDim_{Ai}) = 1 - P(Dim_{Ai}) = 4/5 = 0,8$$

e

$$P(NoDim_{Bi}) = 1 - P(Dim_{Bi}) = 3/4 = 0,75.$$

Le probabilità per A e B di non dimenticare gli occhiali in alcuno dei 5 negozi (i = 1, …, 5) in cui si fermano è:

$$P(NoDim_A) = P(NoDim_{Ai})^5 = 0,8^5 = 0,32$$

e, nell'ipotesi che B li abbia portati,

$$P(NoDim_B) = P(NoDim_{Bi})^5 = 0,75^5 = 0,24.$$

Mentre per A questo valore rappresenta già la probabilità di tornare a casa con gli occhiali, per B non è così.
Il fatto che egli può dimenticare gli occhiali a casa determina una partizione della spazio degli eventi nei due eventi necessari ed incompatibili B_1 = {B esce di casa *con* gli occhiali da sole} e B_2 = {B esce di casa *senza* gli occhiali da sole}, di cui solo il primo è compatibile con E_B, dal momento che quando si verifica B_1 E_B è impossibile.

La probabilità di E_B va calcolata attraverso il teorema delle probabilità totali come segue:

$$P(E_B) = \sum_i P(B_i) \times P(E_B \mid B_i) = P(B_1) \times P(E_B \mid B_1) + P(B_2) \times P(E_B \mid B_2) =$$

$$= \frac{2}{3} \times 0,24 + \frac{1}{3} \times 0 = 0,16$$

In conclusione, dunque:

$P(E_A$ = {A torna a casa con gli occhiali da sole}) = 1 $\times$ 0,32 = 0,32

$P(E_B$ = {B torna a casa con gli occhiali da sole}) = 2/3 $\times$ 0,24 = 0,16

Essendo E_A ed E_B due eventi indipendenti, la loro probabilità congiunta P(E) può essere calcolata come prodotto delle probabilità dei singoli eventi E_A ed E_B:

P(E = {A e B tornano a casa con gli occhiali da sole}) =
= $P(E_A \cap E_B) = P(E_A) \times P(E_B)$ =
= 0,32 $\times$ 0,16 = 0,051

ESERCIZIO 1.6

Due coniugi sono eterozigoti per una certa malattia, ossia entrambi portatori di un allele dominante *A* (sano) ed un allele recessivo *a* (non sano) e ciascuno di essi può trasmettere a caso l'uno o l'altro dei due alleli con probabilità P(*A*) = ½ e P(*a*) = ½. Il genotipo del figlio può essere uno dei seguenti tre: omozigote sano (*AA*), eterozigote (*Aa* oppure *aA*) portatore sano, omozigote affetto (*aa*). Quali sono le probabilità dei tre genotipi?

Soluzione

$$P(AA) = P(Aa) = P(aA) = P(aa) = \tfrac{1}{2} \times \tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{4}$$

$$P(Aa \cup aA) = \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{4} = \tfrac{1}{2}$$