



### Esercizio

Volendo costruire un modello che spieghi il Peso (espresso in kg) in funzione dell'Altezza (espressa in cm) si è osservato un campione di  $n=10$  studenti della facoltà di Economia. I dati ottenuti sono riportati nella tabella seguente:

Altezza	Peso
165	71
172	75
159	81
168	76
166	88
158	72
157	98
177	89
164	83
172	81

- a) Stimare con il metodo dei minimi quadrati i coefficienti del modello di regressione:

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X + \varepsilon$$

- b) Supponendo che le ipotesi di base del modello classico di regressione lineare siano soddisfatte, costruire intervalli di confidenza per un livello di significatività  $\alpha = 0,05$  per l'intercetta  $\beta_0$  e il coefficiente angolare  $\beta_1$ .
- c) Verificare l'esistenza di un legame lineare tra altezza e peso ad un livello di significatività  $\alpha = 0,01$ .
- d) Valutare la bontà di adattamento del modello.
- e) Prevedere il peso di uno studente che è alto 180 cm.



## Svolgimento

Punto a)

Altezza	Peso	A-M(A)	P-M(P)	[A-M(A)] <sup>2</sup>	[B-M(B)] <sup>2</sup>	[A-M(A)]*[B-M(B)]
165	71	-0,8	-10,4	0,64	108,16	8,32
172	75	6,2	-6,4	38,44	40,96	-39,68
159	81	-6,8	-0,4	46,24	0,16	2,72
168	76	2,2	-5,4	4,84	29,16	-11,88
166	88	0,2	6,6	0,04	43,56	1,32
158	72	-7,8	-9,4	60,84	88,36	73,32
157	98	-8,8	16,6	77,44	275,56	-146,08
177	89	11,2	7,6	125,44	57,76	85,12
164	83	-1,8	1,6	3,24	2,56	-2,88
172	81	6,2	-0,4	38,44	0,16	-2,48
1658	814			395,6	646,4	-32,2

$$M(A) = \frac{1658}{10} = 165,8$$

$$M(P) = \frac{814}{10} = 81,4$$

$$Var(A) = \frac{395,6}{10} = 39,56$$

$$Var(P) = \frac{646,4}{10} = 64,64$$

$$Cov(A, P) = \frac{-32,2}{10} = -3,22$$

$$\beta_1 = \frac{Cov(A, P)}{Var(A)} = \frac{-3,22}{39,56} = -0,08$$

$$\beta_0 = M(P) - \beta_1 M(A) = 81,4 - [-0,081 * 165,8] = 94,8$$



Punto b)

Altezza	Peso	PesoStimato	(Peso-PesoStimato) <sup>2</sup>
165	71	81,47	109,52
172	75	80,90	34,76
159	81	81,95	0,91
168	76	81,22	27,26
166	88	81,38	43,78
158	72	82,03	100,70
157	98	82,12	252,29
177	89	80,49	72,45
164	83	81,55	2,11
172	81	80,90	0,01
1658	814	814,00	643,78

$$\text{PesoStimato} = 94,8 - 0,08 * \text{Altezza}$$

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (P - \hat{P})^2}{n-2}} = \sqrt{\frac{643,78}{8}} = 8,97$$

$$es(\beta_0) = s \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{[M(A)]^2}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{X})^2}} = 8,97 \sqrt{\frac{1}{10} + \frac{165,8^2}{395,6}} = 74,8$$

$$es(\beta_1) = s \sqrt{\frac{1}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{X})^2}} = 8,97 \sqrt{\frac{1}{395,6}} = 0,45$$

$$\hat{\beta}_0 - t_{\alpha/2, n-2} es(\beta_0) \leq \beta_0 \leq \hat{\beta}_0 + t_{\alpha/2, n-2} es(\beta_0)$$

$$94,8 - 2,30 * 74,8 \leq \beta_0 \leq 94,8 + 2,30 * 74,8$$

$$-77,66 \leq \beta_0 \leq 267,45$$

$$\hat{\beta}_1 - t_{\alpha/2, n-2} es(\beta_1) \leq \beta_1 \leq \hat{\beta}_1 + t_{\alpha/2, n-2} es(\beta_1)$$

$$-0,08 - 2,30 * 0,45 \leq \beta_1 \leq -0,08 + 2,30 * 0,45$$

$$-1,12 \leq \beta_1 \leq 0,95$$



**Punto c)**

$$H_0: \beta_1 = 0$$

$$H_1: \beta_1 \neq 0$$

$$\alpha = 0,01 \quad \alpha/2 = 0,005$$

$$T = \frac{\hat{\beta}_1}{es(\beta_1)} = \frac{-0,08}{0,45} = -0,18$$

$$t_{0,05,8} = -3,355$$

$T < t \rightarrow$  non rifiuto  $H_0$

**Punto d)**

$$R = [corr(A, P)]^2 = \left[ \frac{\sigma_{A,P}}{\sqrt{\sigma_A^2 \sigma_P^2}} \right]^2 = \left[ \frac{-3,22}{\sqrt{39,56 * 64,64}} \right]^2 = 0,004$$

**Punto d)**

$$\hat{P} = \beta_0 + \beta_1 A_{180} = 94,8 - 0,08 * 180 = 80,2$$