Esercizio 1

La produzione mensile Z di un'impresa dipende dalla produttività del capitale umano X in quel mese e dalla produttività dei macchinari Y impiegati nel processo produttivo, secondo la relazione: Z = 3X + 5Y . Sapendo che E(X) = 3,7; Var(X) = 0, 5; E(Y) = 9, 8; Var(Y) = 2, 4 e Cov(X, Y) = 0, 5, determinare E(Z) e Var(Z).

Esercizio 2

Una popolazione formata da operai maschi, presenta dei pesi corporei (in libbre) di media 167 e scarto quadratico medio 27. Se si seleziona un campione di 36 elementi. Quanto vale circa la probabilità che la media campionaria dei loro pesi stia tra 163 e 171?

Esercizio 3

Sia X una variabile casuale distribuita secondo una Binomiale di parametri n = 25 e p = 0:6. Calcolare P(X ≤ 13).

Esercizio 4

Si osserva un campione casuale di dimensione n=3 estratto da una popolazione con media μ e s.q.m. σ.

a) Quale fra i seguenti stimatori è non distorto per μ?

$$T_1 = \frac{X_1 + X_2 + X_3}{3} \qquad T_2 = \frac{X_1 + 2X_3}{3} \qquad T_3 = 2 + X_3$$

b) Confrontare gli stimatori T_1, T_2, T_3 mediante l'errore quadratico medio e verificare qual è lo stimatore più efficiente tra quelli considerati.

Soluzioni

Esercizio 1

E(Z) = 3*3,7 + 5*9,8 = 60,1
Var(Z) = 9*0,5 + 25*2,4 + 2*3*5*0,5 = 79,5

Esercizio 2

Per il Teorema del Limite Centrale si ha:

$$\overline{X} \approx N\left(\mu; \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

$$P(163 \leq \overline{X} \leq 171) = P\left(\frac{163-167}{27/\sqrt{36}} \leq Z \leq \frac{171-167}{27/\sqrt{36}}\right) = P(-0{,}88 \leq z \leq 0{,}88) \approx 0.63$$

Esercizio 3

Utilizzando il calcolo binomiale si ha:

$$P(X \leq 13) = \sum_{x=0}^{13} \binom{25}{x} * 0{,}6^{x} * 0{,}4^{25-x} = 0{,}267$$

Per il Teorema del Limite Centrale nella versione di De Moivre – Laplace si ha:

P(X ≤ 13) = P(z ≤ -0,82) = 0,206

Effettuando una correzione per la continuità pari a 0,5 si ha una migliore approssimazione:

P(X ≤ 13,5) = P(z ≤ -0,61) = 0,271

Esercizio 4

a) T1 e T2 sono stimatori non distorti per μ:

$$T_1 = \frac{X_1 + X_2 + X_3}{3}$$

$$E(T_1) = \frac{1}{3} E(X_1) + E(X_2) + E(X_3)$$

$$E(T_1) = \frac{1}{3}(\mu + \mu + \mu)$$

$$E(T_1) = \frac{1}{3} 3\mu$$

$$E(T_1) = \mu$$

$$T_2 = \frac{X_1 + 2X_3}{3}$$

$$E(T_2) = \frac{1}{3} E(X_1) + \frac{2}{3} E(X_3)$$

$$E(T_2) = \frac{1}{3}\mu + \frac{2}{3}\mu$$

$$E(T_2) = \frac{3}{3}\mu$$

$$E(T_2) = \mu$$

$$T_3 = 2 + X_3$$

$$E(T_3) = E(2 + X_3)$$

$$E(T_3) = 2 + E(X_3)$$

$$E(T_3) = 2 + \mu$$

$$E(T_3) \neq \mu$$

b) Lo stimatore più efficiente tra quelli considerati è T1.

$$T_1 = \frac{X_1 + X_2 + X_3}{3}$$

$$V(T_1) = V\left(\frac{X_1 + X_2 + X_3}{3}\right)$$

$$V(T_1) = \frac{1}{9}(\sigma^2 + \sigma^2 + \sigma^2)$$

$$V(T_1) = \frac{1}{9} 3\sigma^2$$

$$V(T_1) = \frac{\sigma^2}{3}$$

$$EQM(T_1) = V(T_1) = \frac{\sigma^2}{3}$$

$$T_2 = \frac{X_1 + 2X_3}{3}$$

$$V(T_2) = \frac{1}{9} V(X_1) + \frac{4}{9} V(X_3)$$

$$V(T_2) = \frac{1}{9}\sigma^2 + \frac{4}{9}\sigma^2$$

$$V(T_2) = \frac{5}{9}\sigma^2$$

$$EQM(T_2) = V(T_2) = \frac{5}{9}\sigma^2$$

$$T_3 = 2 + X_3$$

$$V(T_3) = V(2 + X_3)$$

$$V(T_3) = V(X_3)$$

$$V(T_3) = \sigma^2$$

$$EQM(T_3) = V(T_3) \div D(T_3)^2$$

$$EQM(T_3) = \sigma^2 + 4$$

$$EQM(T_1) < EQM(T_2) < EQM(T_3)$$