Università degli Studi di Cassino
Corso di **Statistica**
Anno accademico **2009/2010**
Esercitazioni: Intervalli di confidenza su proporzione e varianza, test

Esercizio 1

Secondo un exit poll su persone che hanno votato all'elezione per sindaco, il 40% ha votato per il candidato Bianchi e il 60% per il candidato Rossi. Ipotizzando che questo sia un campione casuale di tutti gli elettori, si definisca l'intervallo che, ad un livello di fiducia del 99%, contenga la proporzione dei voti della popolazione per il candidato Bianchi nel caso in cui la dimensione campionaria sia a) n = 400, b) n = 40. Per ciascuna ampiezza indicare se sareste disposti a prevedere il vincitore.

Esercizio 2

Un'indagine sulla soddisfazione dei clienti ha prodotto il seguente intervallo di confidenza al 99% per la stima della frequenza di clienti soddisfatti di un servizio:

[64%; 76%]

Di quanti clienti era costituito il campione, sapendo che è stato estratto con criterio casuale semplice con ripetizione da una popolazione molto numerosa?

Esercizio 3

Si ipotizza che gli scarti dalla media mensile di un indice di borsa seguano una distribuzione Normale con media e varianze ignote. Sono osservati i seguenti 5 scarti:

1,2	**-1**	**1,3**	**1,5**	**-0,5**

Determinare un intervallo al 95% per la varianza.

Esercizio 4

Si vuole studiare la durata di un processo produttivo che dal materiale grezzo porta al prodotto finito. Il venditore del meccanismo di produzione sostiene che la durata del processo si distribuisce normalmente con media pari a 11 ore e scarto quadratico medio pari a 4 ore. L'acquirente, sulla base delle valutazioni di un esperto, sospetta invece che, pur distribuendosi normalmente e con scarto quadratico medio pari a 4, la durata media del processo sia 14 ore. Si mettono allora in produzione 16 pezzi e si decide che il meccanismo di produzione verrà acquistato soltanto se la durata media della produzione nel campione è inferiore 13 ore.
Si calcolino la probabilità dell'errore del I tipo (α) e la probabilità dell'errore del II tipo (β), associati al criterio di decisione sopra riportato.

Soluzioni

Esercizio 1

a) n=400 $p = 0{,}40$ $1 - p = 0{,}60$ 1-α=0,99 $z_{\alpha/2} = 2{,}58$

v.c. X: proporzione voti Bianchi $X \sim N\left(\pi; \sqrt{\frac{\pi(1-\pi)}{n}}\right)$

$$P\left(p - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\pi(1-\pi)}{n}} \le \pi \le p + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\pi(1-\pi)}{n}}\right) = 1-\alpha$$

$$P\left(0{,}40 - 2{,}58\sqrt{\frac{0{,}40 * 0{,}60}{400}} \le \pi \le 0{,}40 + 2{,}58\sqrt{\frac{0{,}40 * 0{,}60}{400}}\right) = 0{,}99$$

$$P(0{,}34 \le \pi \le 0{,}46) = 0{,}99$$

Si può prevedere la sconfitta di Bianchi in quanto l'intervallo contiene solo numeri al di sotto di 0,50, quelli cioè che indicano che Bianchi riceve una minoranza dei voti.

b) n=40 $p = 0{,}40$ $1 - p = 0{,}60$ 1-α=0,99 $z_{\alpha/2} = 2{,}58$

$$P\left(0{,}40 - 2{,}58\sqrt{\frac{0{,}40 * 0{,}60}{40}} \le \pi \le 0{,}40 + 2{,}58\sqrt{\frac{0{,}40 * 0{,}60}{40}}\right) = 0{,}99$$

$$P(0{,}20 \le \pi \le 0{,}60) = 0{,}99$$

Non è possibile prevedere un vincitore in quanto l'intervallo contiene valori al di sotto e al di sopra di 0,50. La stima puntuale è la stessa ottenuta in (a) ma l'intervallo è più largo in quanto il campione è più piccolo.

Esercizio 2

$$P(0{,}64 \le \pi \le 0{,}76) = 0{,}99$$

p = 0,70 ε = 0,06 z = 2,58

$$z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\pi(1-\pi)}{n}} = \varepsilon \rightarrow n = \frac{z^2{}_{\alpha/2} \cdot \pi \cdot (1-\pi)}{\varepsilon^2}$$

$$n = \frac{\left[z^2 * p * (1-p)\right]}{\varepsilon^2}$$

$$n = \frac{\left[2{,}58^2 * 0{,}70 * (1-0{,}70)\right]}{0{,}06^2} = 388$$

Esercizio 3

$\overline{X} = 0{,}5$ $\quad S = 1{,}160$ $\quad \chi_{0,025;4}{}^2 = 11{,}1433$ $\quad \chi_{0,975;4}{}^2 = 0{,}4844$

$$P\left(\frac{(n-1)}{\chi^2_{\alpha/2;n-1}} S^2 \le \sigma^2 \le \frac{(n-1)}{\chi^2_{1-\alpha/2;n-1}} S^2\right) = 1-\alpha$$

$$P\left(\frac{(5-1)}{11{,}1433} * (1{,}160^2) \le \sigma^2 \le \frac{(5-1)}{0{,}4844} * (1{,}160)^2\right) = 0{,}95$$

$$P\left(0{,}483 \le \sigma^2 \le 11{,}107\right) = 0{,}95$$

Esercizio 4

$H_0 = 11 \rightarrow X \sim N(11, 4) \rightarrow \overline{X} \sim N(11, 1)$

$H_1 = 14 \rightarrow X \sim N(14, 4) \rightarrow \overline{X} \sim N(14, 1)$

Regola di decisione: rifiuto H0 se $\overline{x} \ge 13$

a) $\alpha = P\{\overline{X} \ge 13 \mid \mu = 11\}$

$$\alpha = P\left\{Z \ge \frac{13-11}{1}\right\} = P(Z \ge 2) = 0{,}0228$$

b) $\beta = P\{\overline{X} \le 13 \mid \mu = 14\}$

$$\beta = P\left\{Z \le \frac{13-14}{1}\right\} = P(Z \le -1) = 0{,}1587$$