Esercizio 1

Si consideri una scatola contenente 21 bulloni di cui 3 difettosi, si prendano i 3 bulloni (senza reimissione) e si calcoli la probabilità che siano tutte e tre difettosi.

Soluzione

Definito $E_i =$ "bullone dell'i-ma estrazione è difettoso", la probabilità che il primo bullone estratto sia difettoso è pari a

$$P(E_1) = \frac{3}{21} = \frac{1}{7};$$

La probabilità che anche il secondo bullone estratto sia difettoso, condizionata al verificarsi dell'evento E_1, è pari a

$$P(E_2 \mid E_1) = \frac{2}{20} = \frac{1}{10};$$

Infine la probabilità che il terzo bullone sia difettoso, condizionata al verificarsi dell'evento E_1 e dell'evento E_2 (intersezione di entrambi gli eventi) è pari a

$$P(E_3 \mid E_1 \cap E_2) = \frac{1}{19}.$$

Quindi la probabilità che i tre bulloni siano tutti difettosi sarà pari a

$$P(A \cap B \cap C) = P(E_1)\ P(E_2 \mid E_1)\ P(E_3 \mid E_1 \cap E_2) = 0{,}000752$$

Esercizio 2

Tre programmatori cercano di decodificare un messaggio. Supponendo che essi lavorino indipendentemente e che le rispettive probabilità di decodificare correttamente il messaggio siano 0,3 0,25 e 0,4, si calcoli la probabilità che il messaggio sia decodificato e che tutti e tre lo decodifichino correttamente.

<u>Soluzione</u>

I tre eventi sono indipendenti e definite le tre probabilità si avrà

A = Programmatore 1 decodifica il messaggio
B = Programmatore 2 decodifica il messaggio
C = Programmatore 3 decodifica il messaggio

P(A)=0,3; P(B)=0,25; P(C)=0,40.

La probabilità che il messaggio sia decifrato è data dall'unione dei tre eventi. Sarà necessario che anche solo uno dei tre programmatori riesca a decodificare il messaggio. Siccome i tre eventi non sono incompatibili (non si esclude che duo oppure tutti e tre riescano a decodificare il messaggio) la probabilità sarà, quindi, pari a

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C) =$$

$$P(A \cup B \cup C) = 0{,}3 + 0{,}25 + 0{,}40 - 0{,}075 - 0{,}12 - 0{,}1 + 0{,}03 = 0{,}685$$

La probabilità, invece, che tutti i programmatori riescano a decodificare il messaggio è data dall'intersezione dei tre eventi. Tale probabilità sarà pari a:

$$P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C) = 0{,}03.$$

Esercizio 3

Una azienda possiede tre macchine: A, B e C. Le relative probabilità che si rompano in un certo periodo di tempo sono rispettivamente: 0,3; 0,1 e 0,2. Si calcoli la probabilità che in quel periodo:

a. Siano tutte e tre rotte;
b. Nessuna sia rotta;
c. Un sola sia rotta;
d. Due macchine siano rotte;
e. Che non siano tutti e tre rotte.

<u>Soluzione</u>

Essendo gli eventi indipendenti, si ha:

a. La probabilità che le tre macchine siano rotte è data dall'intersezione delle probabilità dei tre eventi $P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C) = 0{,}006$;

b. La probabilità che nessuna macchina sia rotta è data dall'intersezioni della negazione dei tre eventi: $P(\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}) = P(\overline{A})P(\overline{B})P(\overline{C}) = 0{,}7 * 0{,}9 * 0{,}8 = 0{,}504$

c. La probabilità che solo una macchina sia rotta è data dalla somma delle intersezioni di un evento della negazione degli altri due:
$P(A \cap \overline{B} \cap \overline{C}) + P(\overline{A} \cap B \cap \overline{C}) + P(\overline{A} \cap \overline{B} \cap C) = 0{,}3 * 0{,}9 * 0{,}8 + 0{,}7 * 0{,}1 * 0{,}8 + 0{,}7 * 0{,}9 * 0{,}2 = 0{,}398$

d. Si può calcolare anche il caso di due macchine rotte:
$P(\overline{A} \cap B \cap C) + P(A \cap \overline{B} \cap C) + P(A \cap B \cap \overline{C}) = 0{,}7 * 0{,}1 * 0{,}2 + 0{,}3 * 0{,}9 * 0{,}2 + 0{,}3 * 0{,}1 * 0{,}8 = 0{,}092$

e. La negazione dell'intersezione dei tre eventi dà la probabilità che tutte e tre le macchine non siano rotte: $1 - P(A \cap B \cap C) = 1 - 0{,}006 = 0{,}994$.

Esercizio 4.

100 atleti di una federazione sportiva praticano due discipline. Si sa che 65 atleti praticano il judo e 45 il karate. Qual è la probabilità che un'atleta, selezionato a caso, pratichi "judo", "karate", entrambe le discipline o al più una delle due?

<u>Soluzione</u>

La probabilità che si verifichi uno dei due eventi è:

$$P(k) = \frac{45}{100} = 0{,}45$$

$$P(j) = \frac{65}{100} = 0{,}65$$

La probabilità di selezionare un'atleta che pratichi entrambe le discipline è data dall'intersezione delle due probabilità.

$$P(k \cap j) = P(k)P(j) = 0{,}45 * 0{,}65 = 0{,}293$$

La probabilità di selezionare un'atleta che pratichi al più una delle due discipline è data dall'unione delle due probabilità, siccome gli eventi sono compatibili si ha:

$$P(k \cup j) = P(k) + P(j) - P(k \cap j) = 0{,}45 + 0{,}65 - 0{,}293 = 0{,}808$$

Esercizio 5

Un'urna contiene 4 palline numerate 000, 011, 101, 110 e si consideri che sia estratta una pallina. Siano A, B, C gli eventi che, rispettivamente, la prima, la seconda, la terza cifra della pallina estratta sia 1. Supponendo che gli eventi siano indipendenti, verificare se sono incompatibili.

<u>Soluzione</u>

La probabilità che si verifichi uno dei tre eventi è sempre pari a $1/2$ perchè

$$P(A)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2} \qquad P(B)=\frac{1}{2} \qquad P(C)=\frac{1}{2}.$$

Ricordando che due eventi sono incompatibili quando la loro intersezione è un insieme vuoto. Per verificare l'incompatibilità tra gli eventi occorre calcolare le intersezioni.

$$P(A\cap B)=\frac{1}{4} \qquad P(A\cap C)=\frac{1}{4} \qquad P(B\cap C)=\frac{1}{4}$$

$$P(A\cap B\cap C)=0\neq P(A)P(B)P(C)=\frac{1}{8}$$

Poiché l'intersezione tra i tre eventi non è pari a 0 è facilmente verificabile la non incompatibilità.

Esercizio 6

Una persona ha comprato uno dei 300 biglietti di una lotteria. La lotteria offre un primo premio, due secondi premi e tre terzi premi. Considerando che i premi sono estratti in successione decrescente, qual è la probabilità che il possessore vinca:

a. Il primo premio
b. Il secondo premio, dato che non ha vinto il primo.
c. Il terzo premio, dato che non ha vinto né il primo né il secondo.

<u>Soluzione</u>

Definiti come segue i tre eventi

A = primo premio; B = secondo premio; C = terzo premio.

a. La probabilità che il possessore vinca il primo premio è pari a
   $P(A) = \frac{1}{300} = 0{,}00333$;
b. Essendo già stato estratto il primo premio, non vinto dal possessore del biglietto, la probabilità che vinca il secondo premio è data dalla somma dei due secondi premi disponibili
   $$P(B \mid A) = \frac{2}{299} + \frac{1}{298} = 0{,}010045\,;$$
c. La probabilità che vinca il terzo premio è data dalla somma dei tre terzi premi disponibili
   $$P\left(C \mid A \cap B\right) = \frac{3}{297} + \frac{2}{296} + \frac{1}{295} = 0{,}020248\,;$$