Esercizio 1

Vengono lanciate contemporaneamente 6 monete. Si calcoli:

a) la probabilità che si presentino esattamente 2 “testa”;
b) la probabilità di ottenere almeno 4 “testa”;
c) la probabilità che l’evento “testa” non si verifichi affatto.

Svolgimento

Definiamo p la probabilità di successo e q = (1-p) la probabilità di insuccesso. Nel caso del lancio di una moneta, supposto che questa sia ben equilibrata, si ha che p=q=0,5. I quesiti dell’esercizio chiedono di trovare x successi in n prove. La variabile casuale di riferimento è, quindi, una binomiale i cui parametri sono (n, p).

Quesito a.
Calcolare la probabilità di ottenere *esattamente* 2 eventi “testa”.

$n = 6$;
$p = 0{,}5$
$x = 2$
X~ $Bin(n, p)$

$$P(x=2)=\binom{n}{x}p^x q^{n-x}$$

$$\frac{6!}{2!(6-2)!}0{,}5^2 0{,}5^{6-2}=\frac{6!}{2!4!}0{,}25*0{,}625=\frac{30}{2}0{,}016=0{,}2344$$

Quesito b.
Calcolare la probabilità di ottenere *almeno* 4 eventi “testa”.

X~ $Bin(n, p)$

$$P(x\geq 4)=P\left(x=4\right)\cup P\left(x=5\right)\cup\left(Px=6\right)$$

$$\frac{6!}{4!(6-4)!}0{,}5^4 0{,}5^{6-4}+\frac{6!}{5!(6-5)!}0{,}5^5 0{,}5^{6-5}+\frac{6!}{6!(6-6)!}0{,}5^6 0{,}5^{6-6}=$$

$$=\frac{30}{2}0{,}0625*0{,}25+6*0{,}03125*0{,}5+1*0{,}015625*1=$$

$$=0{,}2344+0{,}0937+0{,}0156=0{,}3437$$

Quesito c.
Calcolare la probabilità che l’evento “testa” non si verifichi affatto.
X~ $Bin(n, p)$

$$P(x=0)=\frac{6!}{0!(6-0)!}0{,}5^0 0{,}5^{6-0}=0{,}015625$$

Esercizio 2

Un dado viene lanciato 7 volte. Si calcoli:

a) la probabilità che si verifichi esattamente 3 volte l'evento "5" oppure l'evento "6".
b) la probabilità che non si verifichi mai l'evento "5" oppure l'evento "6".

Svolgimento

Supponendo che il dado sia ben bilanciato, la probabilità che si verifichi uno qualsiasi tra gli eventi possibili è pari a $\frac{1}{6}$. La probabilità che in un lancio si verifichi l'evento "5" oppure l'evento "6" è pari a $P(x=5) \cup P(x=6) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

Si possono quindi definire i parametri della V.C. binomiale:

$n = 7$

$p = \frac{1}{3}$

$q = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

Quesito a

Calcolare la probabilità che l'evento "5" oppure "6" si presenti esattamente 3 volte.

$x = 3$

X~ $Bin(n, p)$

$$P(x=3) = \binom{7}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{7!}{3!(7-3)!}\frac{1}{27}\frac{16}{81} = \frac{210}{6}\frac{1}{27}\frac{16}{81} = 0,2561$$

Quesito b

Calcolare la probabilità che non si verifichi mai l'evento "5" oppure l'evento "6".

$x = 0$

X~ $Bin(n, p)$

$$P(x=0) = \binom{7}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^0\left(\frac{2}{3}\right)^7 = \frac{7!}{0!(7-0)!} * 1 * \frac{128}{2187} = 0,0585$$

Esercizio 3

In un poligono di tiro la probabilità che ad una certa distanza un determinato individuo colpisca il bersaglio esattamente al centro è 0,25. Calcolare:

a) la probabilità che lo stesso individuo centri almeno 2 volte il bersaglio in 7 tentativi;
b) Quante volte deve sparare affinché la probabilità di fare centro almeno una volta sia maggiore di $\frac{2}{3}$?

Svolgimento

Quesito a.

$n = 7$
$p = 0{,}25$
$1\text{-}p = 0{,}75$
$X \sim Bin(n, p)$

$$P(x \geq 2) = 1 - P(x < 2) = 1 - (P(x = 0) \cup P(x = 1))$$

$$P(x = 0) \cup P(x = 1) = \frac{7!}{0!(7!)} 0{,}25^0 0{,}75^7 + \frac{7!}{1!(6!)} 0{,}25^1 0{,}75^6 =$$
$$= (1 * 1 * 0{,}1335) + (7 * 0{,}25 * 0{,}1780) = 0{,}1335 + 0{,}3115 = 0{,}4450$$

$$P(x \geq 2) = 1 - 0{,}4450 = 0{,}5550$$

Quesito b.

Siccome la probabilità di sbagliare è pari a $q = 0{,}75$ bisogna determinare il più piccolo valore di n per il quale q^n è minore di $1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$.

$$0{,}75^1 = 0{,}75 > \frac{1}{3}; \quad 0{,}75^2 = 0{,}562 > \frac{1}{3}; \quad 0{,}75^3 = 0{,}422 > \frac{1}{3}; \quad 0{,}75^4 = 0{,}316 < \frac{1}{3}$$

Quindi, bisogna sparare almeno 4 volte

Esercizio 4

Un'urna contiene 10 palline, di cui 4 bianche e 6 nere. Calcolare la probabilità di estrarre 3 palline bianche in una successione di 5 estrazioni senza reintroduzione.

Sia:

H = 10 (il numero di palline);
b = 4 (il numero di palline bianche);
x = 3 (il numero di successi);
n = 5 (il numero delle prove);

$$P(X = x) = \frac{\binom{b}{x}\binom{H-b}{n-x}}{\binom{H}{n}}$$

$$P(x = 3) = \frac{\frac{4!}{3!(4-3)!}\frac{(10-4)!}{(5-3)![(10-4)-(5-3)]!}}{\frac{10!}{5!(10-5)!}} =$$

$$= \frac{\frac{4!}{3!}\frac{6!}{2!4!}}{\frac{10!}{5!5!}} = \frac{60}{252} = 0,238$$

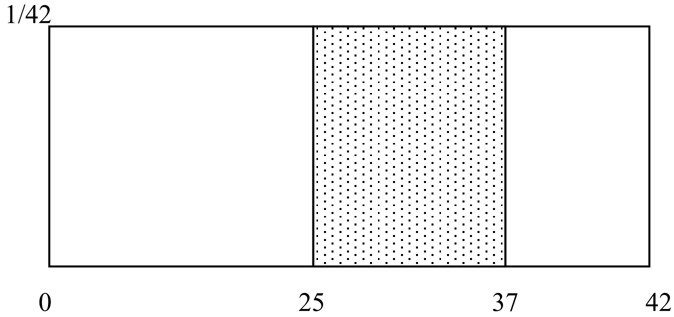
Esercizio 5

Qual è la probabilità che un maratoneta si ritiri dalla corsa tra il 25° e il 37° chilometro, supposto che la probabilità di ritirarsi sia costante durante tutti i 42 chilometri della corsa?

Sia:

a = 37/42;

b = 25/42;



$$P(25 < x < 37) = \frac{37}{42} - \frac{25}{42} = \frac{12}{42} = 0,286$$

Esercizio 6

All'aeroporto di Linate in dieci minuti atterrano normalmente 2 aerei. Calcolare la probabilità che in venti minuti ne atterrino 3.

Svolgimento

La variabile casuale cui fa riferimento l'esercizio è la v.c. di Poisson. Tale v.c. è caratterizzata dal fatto che assume valori discreti, ma è definita in un intervallo continuo.
Affinché ci sia una legge di Poisson gli intervalli possono essere divisi in sottointervalli in modo tale che la probabilità di avere più di un successo in quel sottointervallo sia ≈ 0. Inoltre gli eventi nei diversi sottointervalli devono essere ripetibili.
La v.c. di Poisson assume un unico parametro λ, che ne rappresenta sia il valore atteso che la varianza.

X~$P(\lambda)$;
λ = 2 (cioè 2 atterraggi nell'intervallo considerato)

$P(X = x) = \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda}$ in questo caso λ diviene 4

$$P(x = 3) = \frac{4^3}{3!} e^{-4} = \frac{64}{6} 0,018 = 0,1964$$

1. La Curtosi di una variabile casuale normale è:
   □ pari a 3 □ pari a 2 □ pari a 4

2. La variabile casuale binomiale è un modello di probabilità:
   □ misto □ discreto □ continuo

3. Nella prova "lancio di due dadi" l'evento "esce la faccia 2 al primo dado e esce la faccia 4 al secondo dado" indica:
   □ una unione logica □ una intersezione logica □ il teorema delle probabilità totali

4. Il momento terzo di una variabile casuale dalla sua media indica:
   □ la curtosi □ la moda □ la simmetria

5. Sia Y=aX+q (a e q indicano delle costanti). Il valore atteso di Y e pari a:
   □ XE(a)+q □ aE(X) □ aE(X)+q

6. Sia Y=aX+q (a e q indicano delle costanti). La varianza di Y e pari a:
   □ *a*var(X)+q □ aX^2+q □ a^2var(X)