Esercizio 1

Supponendo di avere a disposizione i dati relativi alla percentuale di spesa per attività di svago di un campione di 16 individui (vedi tabela sottostante), si determini un intervallo di confidenza al 95% per la varianza incognita della popolazione:

a) non conoscendo la media della popolazione;
b) supponendo che la media della popolazione sia pari a 3,0

i	% di reddito speso
1	5,4
2	3,2
3	4,6
4	7,5
5	1,6
6	2,8
7	0,8
8	4,2
9	3,8
10	2,6
11	1,7
12	3,0
13	1,5
14	4,8
15	3,4
16	2,5

Svolgimento

a)

$$\bar{X} = 3,338; \quad S^2 = 2,897$$

$$P\left(\frac{(n-1)}{\chi^2_{\left(\alpha/2;n-1\right)}} s^2 < \sigma^2 < \frac{(n-1)}{\chi^2_{\left(1-\alpha/2;n-1\right)}} s^2 \right) = 1-\alpha$$

$$\chi^2_{0,025;15} = 27,488 \qquad \chi^2_{0,975;15} = 6,262$$

$$\left[1,581 < \sigma^2 < 6,940\right]$$

b)

Se si conosce la media della popolazione, i gradi di libertà sono *n* e non (*n-1*) e il calcolo della varianza campionaria avviene, ovviamente, sottraendo da ogni osservazione la media della popolazione. Nel nostro caso, se per esempio la media della popolazione fosse pari a 3,0 si avrebbe che $\tilde{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum(x_i - \mu)^2 = 2,83$ $\chi^2_{0,025;16} = 28,845$ $\chi^2_{0,975;16} = 6,907$

$$P\left(\frac{n}{\chi^2_{\left(\alpha/2;n\right)}}\tilde{\sigma}^2 < \sigma^2 < \frac{n}{\chi^2_{\left(1-\alpha/2;n\right)}}\tilde{\sigma}^2\right) = 1-\alpha$$

$$\left[1,570 < \sigma^2 < 6,556\right]$$

Come si può notare, la conoscenza della media della popolazione rende l'intervallo più stretto.

Esercizio 2

Una ditta produttrice di bulloni esegue un test su un campione di n=22 bulloni da essa prodotti per verificare che la varianza della misura del loro diametro sia pari a 1,8 millimetri. Dai dati campionari si desume che la varianza sul campione è pari a 1,95 millimetri. Verificare ad un livello di significatività del 5%

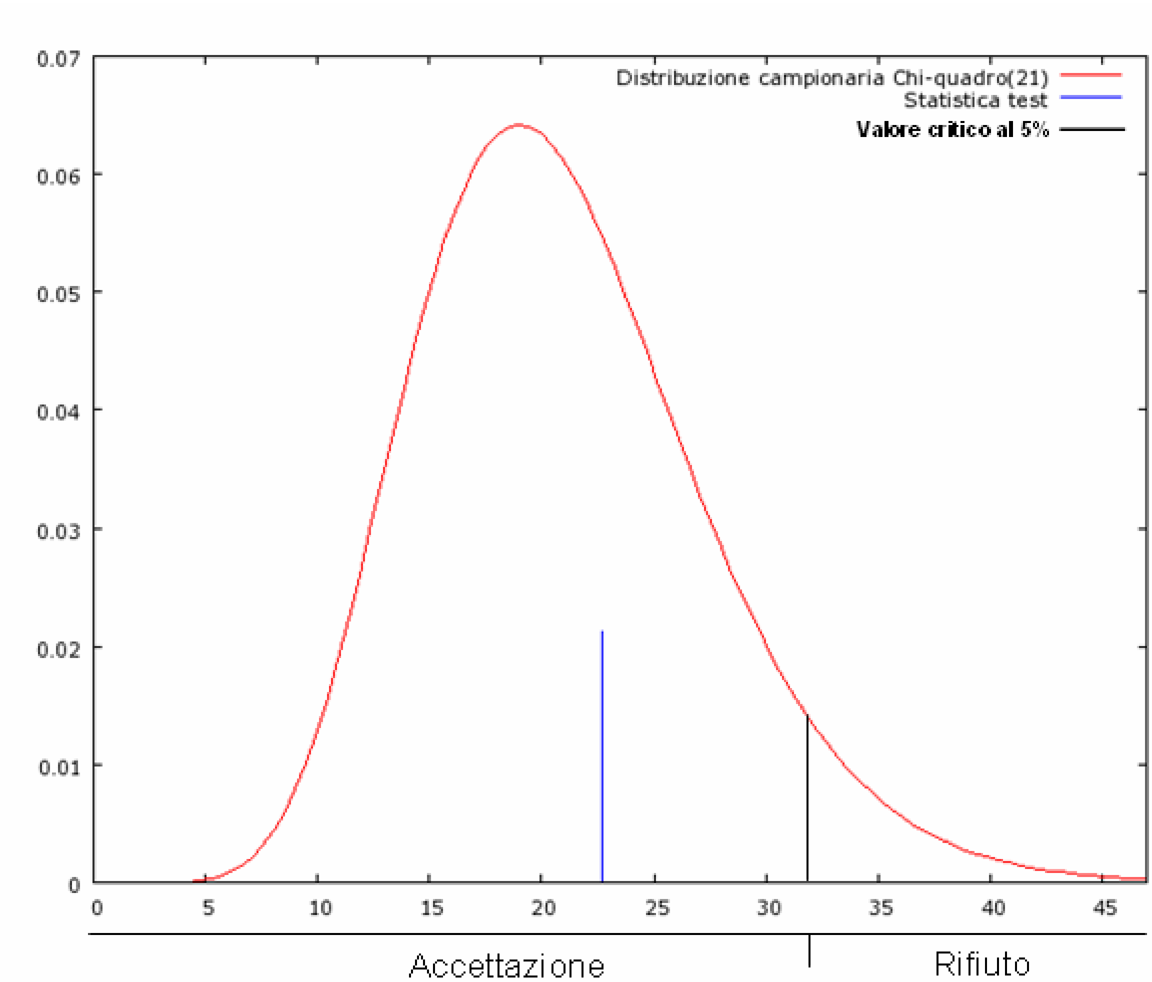
a) che la varianza del campione sia più grande della varianza della popolazione (test ad una coda);
b) che la varianza del campione sia diversa dalla varianza della popolazione (test a due code).

a) n = 22; $\sigma^2 = 1,8;$ $S^2 = 1,19$

$H_0 : \sigma^2 = 1,8;$ $H_1 : \sigma^2 > 1,8$

$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{(n-1)}$ $\frac{21 \cdot 1,95}{1,8} = 22,75;$ $\chi^2_{(21;0,05)} = 32,67$

Si accetta Ho.

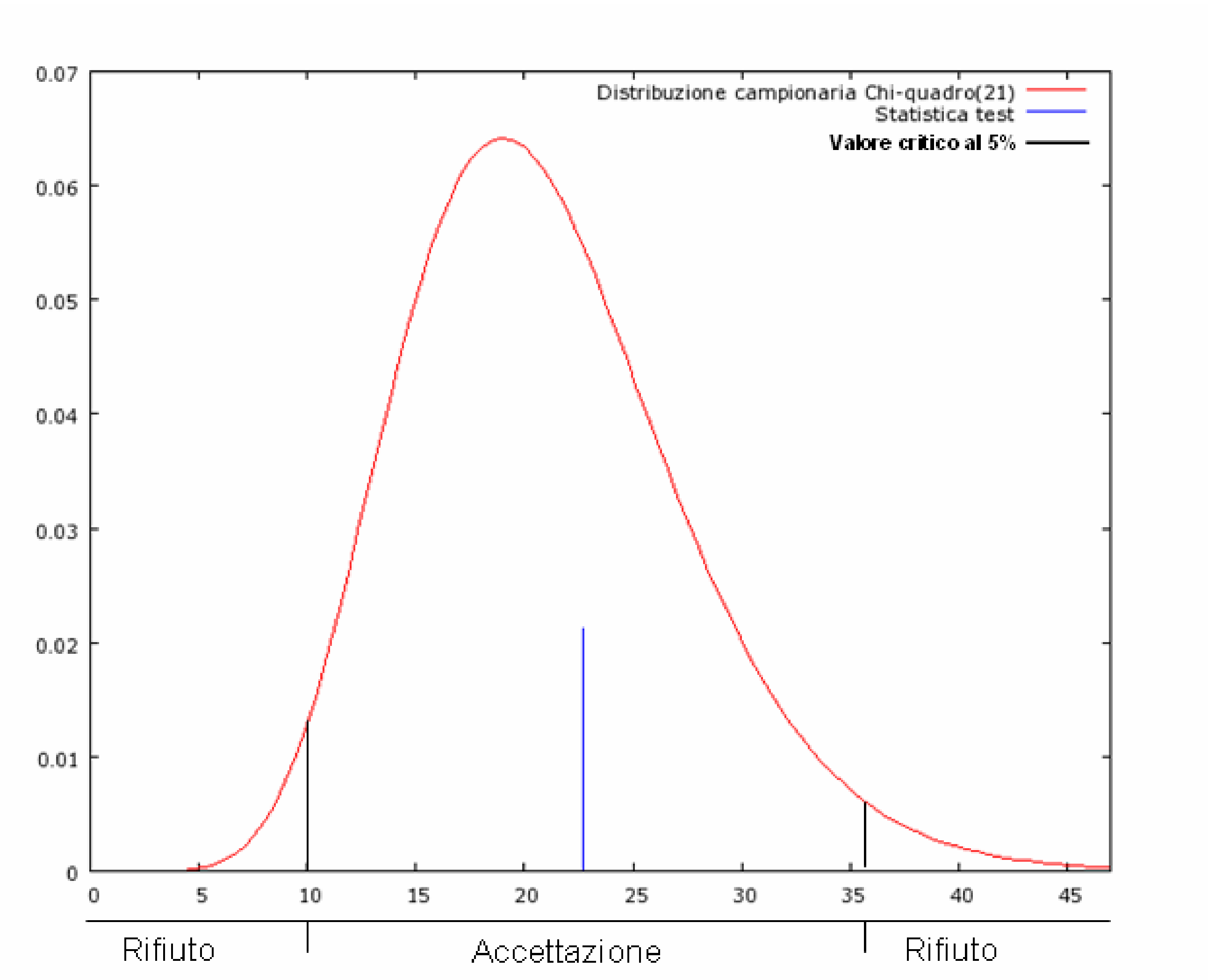


b) n = 22; $\sigma^2 = 1,8;$ $S^2 = 1,19$ $\alpha/2 = 0,025$

$H_0 : \sigma^2 = 1,8;$ $H_1 : \sigma^2 \neq 1,8$

$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{(n-1)}$ $\frac{21 \cdot 1,95}{1,8} = 22,75;$ $\chi^2_{(21;0,975)} = 10,28$ $\chi^2_{(21;0,025)} = 35,47$

10,28 < 22,75 < 35,47 Si accetta Ho



Esercizio 3 Test differenza tra medie, varianza incognita

Due comitive di turisti, rispettivamente di 13 e 11 persone, hanno soggiornato ad Ischia per una breve vacanza. La seguente tabella riporta la spesa giornaliera di ciascun turista. Supponendo che i due caratteri siano omoschedastici e che si distribuiscono normalmente, si può affermare ad un livello $\alpha = 0,01$ che la spesa media delle due comitive è la stessa?

Comitiva A	120	130	90	100	110	80	100	140	130	170	90	110	130
Comitiva B	110	120	130	90	160	100	140	150	120	150	180		

Svolgimento

$H_0 : \mu_A = \mu_B$

$H_1 : \mu_A \neq \mu_B$

$$\bar{X}_A = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_A}{n_A} = 115{,}38\,;$$

$$\bar{X}_B = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_B}{n_B} = 131{,}8182\,;$$

Varanza pooled = $S_P^2 = \left(\frac{(n_A - 1)S_A^2 + (n_B - 1)S_B^2}{n_A + n_B - 2} \right)$ = 667,5779

$$t = \frac{\bar{X}_A - \bar{X}_B}{S_P \sqrt{\frac{1}{n_A} + \frac{1}{n_B}}} = -\,1{,}5528$$

$t_{\alpha; n_A + n_B - 2} = \pm 3{,}119$

siccome - 3,119 < - 1,58743 < + 3,119 Si accetta l'ipotesi Ho.

PRECISAZIONE:

Nel caso in cui i due caratteri non fossero stati omoschedastici , con varianze σ_A^2, σ_B^2 incognite, il procedimento restava lo stesso ma cambiava la statistica test.

$$t = \frac{\bar{X}_A - \bar{X}_B}{\sqrt{\frac{S_A^2}{n_A} + \frac{S_B^2}{n_B}}} =$$

Esercizio 4 Test sulla media, varianza incognita

Una ditta fabbrica pneumatici asserendo che la loro durata media sia di 40200 Km. In seguito alla estrazione casuale di un campione di 20 pneumatici, si riscontra quanto segue:

$\bar{X} = 40900$ Km;
S = 6000

Sottoporre a verifica, con un livello di significatività del 5%, l'ipotesi che la durata media dei pneumatici sia maggiore.

Svolgimento.

Ho: $\mu = 40200$
$H_{1:}$ $\mu > 40200$

$$t = \frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \sim t_{n-1} \;;$$

t=0,521;

$t_{\alpha;n-1} = 1{,}729$;

Si accetta l'ipotesi Ho

Esercizio 5 Test sulla media, varianza incognita

Una ditta fabbrica pneumatici asserendo che la loro durata media sia di 40200 Km. In seguito alla estrazione casuale di un campione di 100 pneumatici, si riscontra quanto segue:

$\overline{X} = 40900$ Km;
S = 6500

Sottoporre a verifica, ad un livello di significatività del 5%, l'ipotesi che la durata media dei pneumatici sia maggiore.

Svolgimento.

Ho: $\mu = 40200$
$H_{1:}$ $\mu > 40200$

$$t = \frac{\overline{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \sim t_{n-1} \; ;$$

In virtù del teorema del limite centrale, data la elevate numerosità, t ~ N(0,1).

t=1,076123;

$z_\alpha = 1,645$

Si accetta l'ipotesi Ho

Esercizio 6 Test sulla media, varianza nota.

In passato, la lunghezza media delle pannocchie di grano è stata uguale a 27 cm con $\sigma^2 = 24$.
Si vuole sottoporre a test l'ipotesi che le pannocchie di un determinato anno abbiano una lunghezza media diversa, sulla base di un campione di 20 elementi con un α = 0,04.

30	29	16	19	25	23	18	17	29	30
29	30	23	27	22	16	28	24	26	30

Svolgimento

$H_0 : \mu = 27$

$H_1 : \mu \neq 27$

$$\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = 24{,}55$$

$$z = \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} =$$

z = - 2.24

$$z_{\alpha/2} = 2{,}05375$$

Siccome -2,24 < -2,05375 si rifiuta l'ipotesi Ho