Esercizio 1.

La V.C. Y segue una distribuzione normale con media 45 e varianza 9. La V.C. X segue una legge normale con media 12 e varianza 4. Calcolare come si distribuisce e quali sono i parametri della V.C. G = 6Y+2X ipotizzando:

a) Che le variabili casuali Y e X siano dipendenti;
b) Che le variabili casuali Y e X siano indipendenti.

Quesito a.

La variabile casuale G, somma di due V.C. normali, si distribuisce anch'essa come una normale.

La media della V.C. G è uguale a $6\overline{Y}+2\overline{X}$.
La varianza della V.C. G è uguale a $6^2\,\mathrm{var}(Y)+\ 2^2\,\mathrm{var}(X)+6\cdot 2\cdot 2Cov_{Y,X}$

G~ $N\left(\left(6\overline{Y}+2\overline{X}\right),\left(36\,\mathrm{var}(Y)+4\,\mathrm{var}(X)+24Cov_{Y,X}\right)\right)$

Quesito b.

Ipotizzare la indipendenza delle varabili casuali Y e X significa presumere che $Cov_{Y,X} = 0$.
Pertanto:
G~ $N\left(\left(6\overline{Y}+2\overline{X}\right),\left(36\,\mathrm{var}(Y)+4\,\mathrm{var}(X)\right)\right)$

N.b.

Se la V.C. G fosse stata uguale a 6Y – 2X, i parametri sarebbero stati:

Media = $6\overline{Y}-2\overline{X}$

Varianza = $6^2\,\mathrm{var}(Y)+\ 2^2\,\mathrm{var}(X)-6\cdot 2\cdot 2Cov_{Y,X}$

Esercizio 2

Supponendo che la media dei redditi dichiarati da un gruppo di famiglie sia di 25.000 euro in un dato anno e supponendo che lo scarto quadratico medio sia di 5.000 euro, qual è la probabilità che una famiglia scelta a caso abbia un reddito compreso tra 10.000 e 40.000 euro?

Questo esercizio si risolve ricorrendo alla disuguaglianza di Cebicev, la quale afferma che preso un qualsiasi campione di dati e calcolato il parametro K, con valore K > 1, conoscendo la varianza del fenomeno e senza alcuna informazione sulla forma della distribuzione, almeno una frazione pari a $1-\frac{1}{K^2}$ dei dati cade nell'intervallo $\overline{x} \pm \sigma_X K$.

I nostri dati sono:

$\mu_X = 25.000$ $\sigma_X = 5.000$ $\varepsilon = 40.000 - \mu_X = \mu_X - 10.000 = 15.000$

Definito $K = \frac{\varepsilon}{\sigma_X} = 3$, cioè come il rapporto tra il termine di errore e lo scarto quadratico medio, la proporzione di famiglie il cui reddito è compreso tra 40.000 e 10.000 euro è:

$$P\left[\left|X-\mu\right| \leq K\sigma\right] \geq 1-\frac{1}{K^2} = 1-\frac{1}{9} = 0{,}888889$$

Esercizio 3

Sia X un v.c. che si distribuisce come una. normale avente media 350 e varianza 100. Si calcoli la probabilità che:

a) *x* sia minore di 338;
b) *x* sia maggiore di 338;
c) *x* sia compreso tra 325 e 375;
d) *x* sia compreso tra 335 e 345;
e) *x* sia compreso tra 360 e 379;
f) *x* sia maggiore di 350.

X~N(350,100)

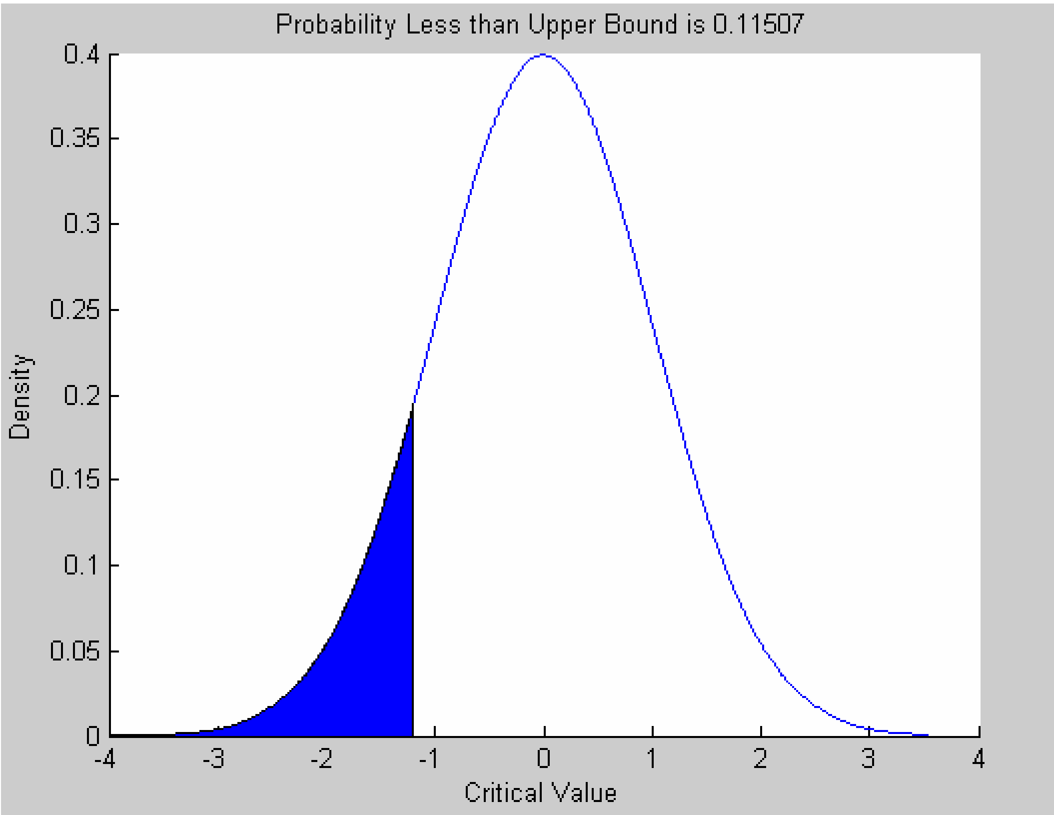
Svolgimento

Quesito a.

$$z = \frac{x-\mu}{\sigma} = \frac{338-350}{10} = -1{,}2$$

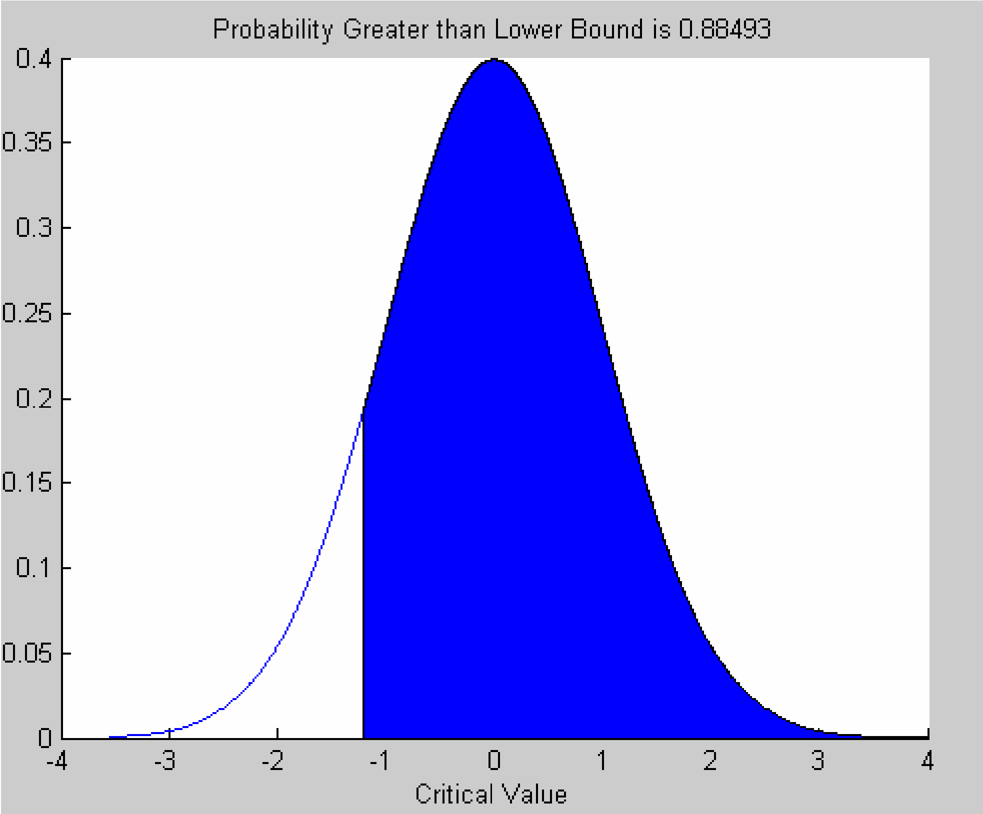
$$P(x < 328) = P(z < -2{,}2) = 0{,}1151$$

Dalla lettura delle tavole della v.c. normale standardizzata si ha che tale probabilità e pari a 0,1151.
Infatti, l'ordinata z = 1,2 della suddetta curva riporta un valore (compreso tra 0 e 1,2) pari a 0,3849.
Dalla simmetria della v.c. normale segue che P(z < -1,2) = 0,5 – P(0<z < 1,2).
Infatti 0,5 - 0,3849 = 0,1151.



Quesito b.

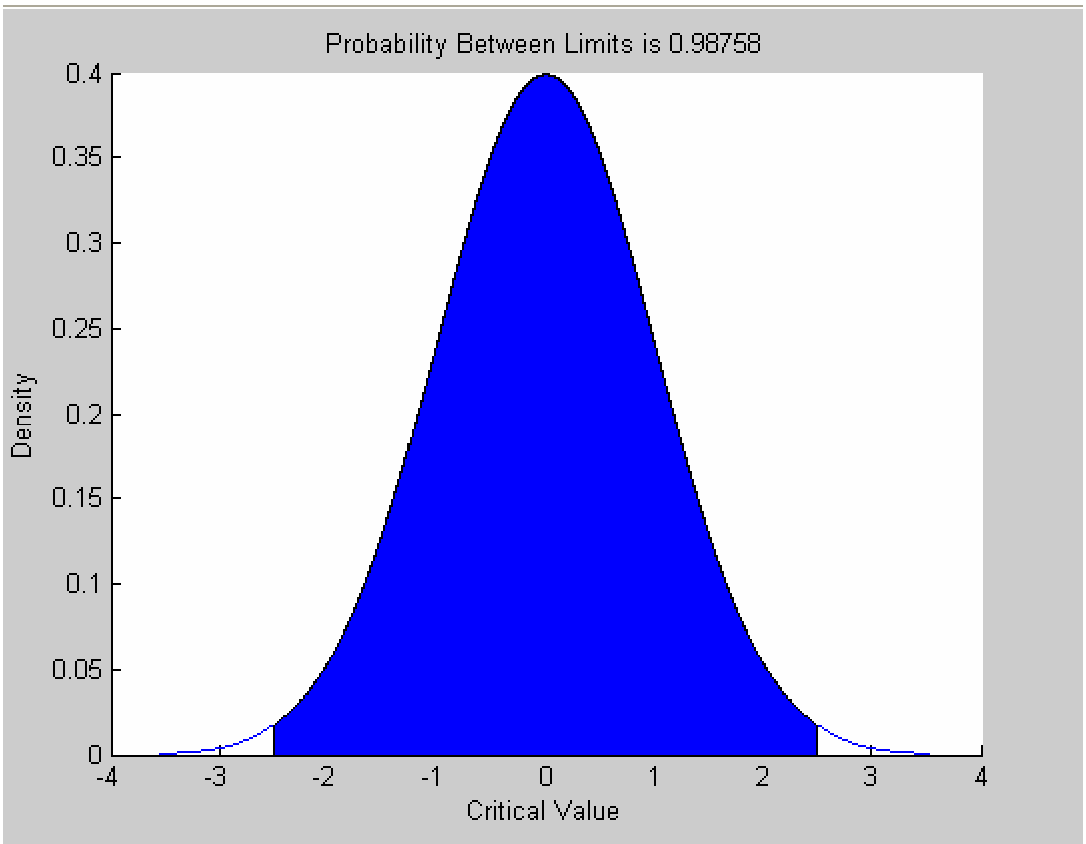
Dal quesito precedente segue che P(x > 338) = P(z > -1,2) .
Quindi, P(z > -1,2) = 0,3849+0,5 = 0,8849.



Quesito c.

$$z_1 = \frac{325 - 350}{10} = -2,5 \qquad\qquad z_2 = \frac{375 - 350}{10} = 2,5$$

P(225 < x < 275) = P(-2,5 < z < 2,5) = 0,9876
Dobbiamo trovare la massa di probabilità compresa tra le ordinate di z comprese tra 2,5 e -2,5 della v.c. normale standardizzata. Dalle tavole si ha che il valore compreso tra 0 e 2,5 è paria a 0,4938 (ricordiamo che tale valore è relativo a P(0<z < 2,5)). A questo punto è necessario addizionare a tal numero il valore corrispondente a P(-2,5<z < 0) = 0,4938.
Per cui:
P(-2,5 < z < 2,5) = P(-2,5<z < 0) + P(0<z < 2,5) = 0,4938 + 0, 4938 = 0,9876.

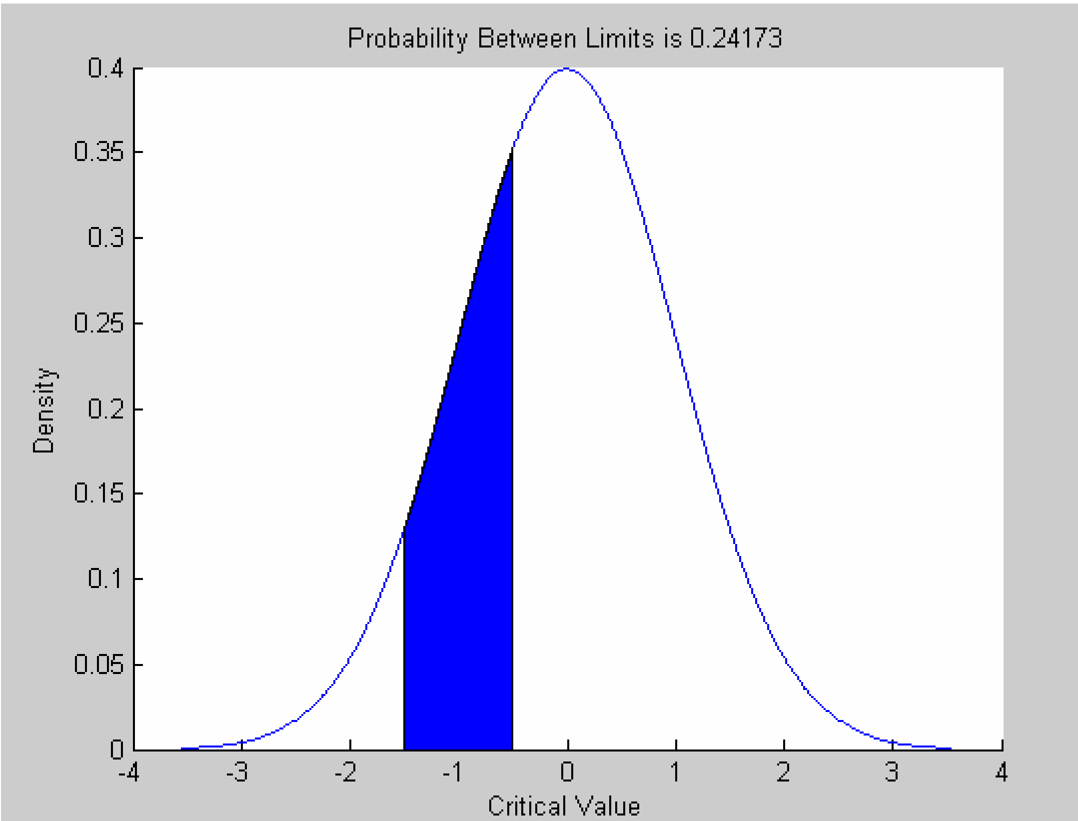


Quesito d.

$$z_1 = \frac{335-350}{10} = -1,5 \qquad\qquad z_2 = \frac{345-350}{10} = -0,5$$

Procediamo come nel quesito precedente.

P(335 < x < 345) = P(-1,5 < z < -0,5) = P(-1,5<z<0) – P(-0,5<z<0) = 0,4332 – 0,1915 = 0,2417

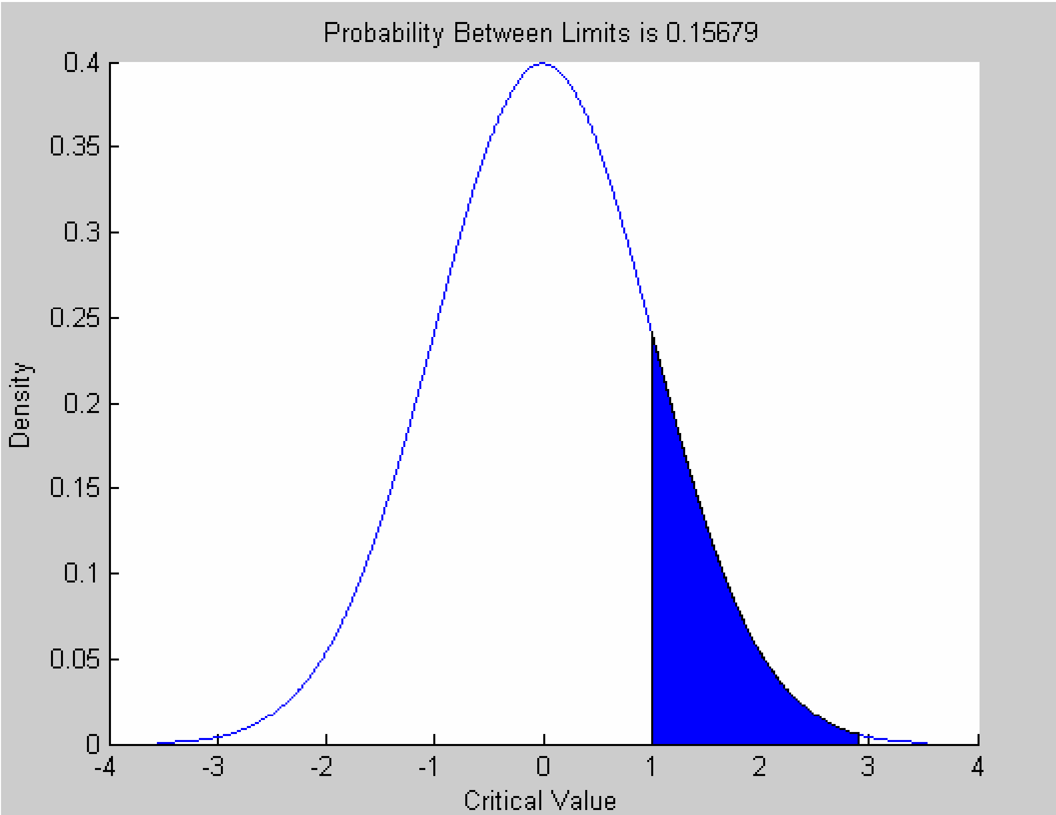


Quesito e.

$$z_1 = \frac{360 - 350}{10} = 1 \qquad\qquad z_2 = \frac{379 - 350}{10} = 2{,}9$$

Procediamo come nel quesito precedente.

P(360 < x < 379) = P(1 < z < 2,9) = P(0<z < 2,9) – P(0<z < 1) = 0,4981 – 0,3413 = 0,1568



Quesito f.

Essendo il valore x uguale al valor medio della V.C. di riferimento, l'ordinata z risulta pari a zero e quindi, come è noto, la probabilità risulta pari a 0,5.

Esercizio 4

Si supponga che i punteggi relativi ad un esame (in cui al massimo si può aspirare a 100) siano distribuiti normalmente con media 76 e scarto quadratico medio15.
Il 15% degli studenti (quelli migliori) viene classificato "A", ed il 10% (quelli peggiori) viene classificato "F". Si determini:

a) il punteggio minimo occorrente per essere classificati "A".
b) il punteggio minimo per essere promossi (cioè per non prendere un voto "F").

Svolgimento

Quesito a.

Innanzitutto troviamo il valore della curva della v.c. normale standardizzata che lascia nella coda il 15%.
Cioè dobbiamo trovare quel valore z tale per cui P(z > Z)=0,15.
Dalla lettura delle tavole, si può vedere come il valore probabilità 0,35 (da cui 0,5 – 0,15 = 0,35) è associato al valore Z = 1,034.
Dal fatto che $z = \frac{x-\mu}{\sigma}$ segue che $1{,}034 = \frac{x-76}{15}$. Risolvendo per la x (che rappresenta il punteggio non standardizzato che lascia sulla coda il 15% di probabilità) si ottiene:

$15 \times 1{,}034 = x - 76$ da cui 15,6+76= x e quindi x=91,6 che approssimato all'intero più vicino dà 92.
Quindi il punteggio minimo richiesto per ottenere una "A" è 92.

Quesito b.

Per risolvere tale quesito si deve trovare il valore della curva della v.c. normale standardizzata che lascia nella coda il 10%.
Si deve cioè trovare quel valore z tale per cui P(z < Z) = 0,10.
Dalla lettura delle tavole si vede che il valore probabilità 0,40 (da cui 0,5 – 0,10 = 0,40) è associato al valore z pari a 1,29. Ovviamente, trattandosi della coda sinistra della distribuzione normale, dobbiamo prendere in considerazione il valore -1,29.

Di conseguenza $-1{,}29 = \frac{x-76}{15}$ da cui – 19,35= x –76 e quindi x = 56,65 che, approssimato all'intero più vicino, dà 57.
Il punteggio minimo per non essere bocciati è 57.

Esercizio 5

Sia X una V.C. che si distribuisce come una normale con media 100 e varianza 225. Si determinino gli estremi dell'intervallo centrato sulla media (100), all'interno del quale vengono a trovarsi l'80% dei casi.

Svolgimento

Dalle tavole della V.C. normale standardizzata dobbiamo trovarci P(0 < Z < z) = 0,4.
Dalla lettura delle tavole si vede che il valore probabilità 0,40 è associato al valore z pari a 1,29.
Dalla simmetria della v.c. normale segue che anche P(-1,29 < Z < 0) sia uguale a 0,4.

L'intervallo dei valori standardizzati, centrato sulla media 0 della v.c. normale standardizzata, e che racchiude l'80% delle osservazioni è pertanto [-1,29 1,29].

A questo punto, dal fatto che $z = \frac{x-\mu}{\sigma}$ segue che:

a) $1,29 = \frac{x-100}{15}$, risolvendo per la x si ottiene 19,35 = x – 100, da cui x = 100 + 19,35 = 119,35

b) $-1,29 = \frac{x-100}{15}$, da cui -19,35 = x – 100; x = 100 – 19,35 = 80,65.

L'intervallo [80,65 119,65] racchiude l'80% delle osservazioni centrate sulla media 100.