Esercizio 1

Si intende stimare il tempo medio necessario ad effettuare un'operazione. Si ha a disposizione un campione casuale costituito dai seguenti n=28 dati espressi in minuti primi. Assumendo che il carattere si distribuisca normalmente, determinare un intervallo di confidenza al 99% per la media incognita della popolazione.

30	28	27	23	31	36	27
35	32	25	24	34	31	22
27	38	24	22	35	39	23
25	36	26	29	32	27	22

$\overline{X}$ = 28,93

S = 5,2

$\alpha = 0{,}01 \qquad \alpha / 2 = 0{,}005 \qquad t_{\alpha/2;27}$ =2,771

$$\mathbf{P}\left(\overline{X} - t_{\alpha/2;n-1} \frac{s}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \overline{X} + t_{\alpha/2;n-1} \frac{s}{\sqrt{n}} \right) = 1 - \alpha \quad \rightarrow \quad \overline{X} \pm t_{\alpha/2;n-1} \frac{s}{\sqrt{n}}$$

$28{,}93 \pm 2{,}771 * \frac{5{,}2}{\sqrt{28}}$ = $28{,}93 \pm 2{,}723$

[26,107 < μ < 31,653]

Esercizio 2

Le osservazioni 12, 9, 10, 13 costituiscono un campione casuale, tratto da una popolazione con carattere X e normalmente distribuita con $\sigma = 3$.
Si individui un intervallo di confidenza al 95% per la media μ della popolazione.

X~N$\left(\theta, \sigma^2\right)$

σ^2 è noto

$1-\alpha$ = 0,95

α = 0,05

$\alpha/2 = 0{,}025$

$\mathbf{Z}_{\alpha/2} = 1{,}96$

$\overline{\mathbf{X}} = 11$

n = 4

$$\mathbf{P}\left(-z \le \frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \le z\right) = 1-\alpha \rightarrow \mathrm{P}\left(\overline{X} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \le \mu \le \overline{X} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 1-\alpha \rightarrow \overline{X} \pm z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$11 \pm 1{,}96 * 3/2$ = $11 \pm 2{,}94$

[8,06 < μ < 13,94]

Esercizio 3

Si dispone di un campione casuale costituito da *n* = 500 assemblaggi; di questi un numero *x* = 10 presenta dei difetti. Si determini un intervallo di confidenza al 95% per la probabilità di successo P incognita..

Dal Teorema del Limite Centrale si ha che P~N$\left(\pi, \pi(1-\pi)/n\right)$.

$\pi = 0{,}02$

$1 - \pi = 0{,}98$

E(P) = 0,02

Var(P) = 0,0000392

$\alpha = 0{,}05$

$\alpha/2 = 0{,}025$ $\qquad$ $\mathbf{z}_{\alpha/2} = 1{,}96$

n=500

$$P\left(\pi - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\pi(1-\pi)}{n}} \le p \le \pi + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\pi(1-\pi)}{n}}\right) = 1-\alpha \rightarrow 0{,}02 \pm 0{,}0123$$

[0,0077 < p < 0,0323]

Esercizio 4

Siano noti i seguenti dati campionari:

$\bar{X} = 85$ $\quad S^2 = 39,9$ $\quad n = 15$

a) Si determini un intervallo di confidenza per la media ignota della popolazione al 99% assumendo la normalità distributiva del carattere.
b) Si determini un intervallo di confidenza per la media incognita della popolazione assumendo che la varianza della popolazione sia pari a 39,9 e non avendo alcuna informazione sulla distribuzione del fenomeno.

Svolgimento

a)

talpha/2	Sigma/radq(n)	ampiezza	limite inferiore 99%	limite superiore 99%
2,977	1,631	4,855	80,145	89,855

b) Si ricorre alla disuguaglianza di Cebicev.

$$P\left[|X-\mu| \leq K\sigma\right] \geq 1-\frac{1}{K^2}$$

Ponendo $\varepsilon = K\sigma$ si ha $P\left[|X-\mu| \leq \varepsilon\right] \geq 1-\dfrac{1}{\frac{\varepsilon^2}{\sigma^2}} = 1-\dfrac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$

Sapendo che la Varianza della V.C. media campionaria è pari a $\dfrac{\sigma^2}{n}$, la disuguaglianza può essere scritta come

$$P\left[|X-\mu| \leq \varepsilon\right] \geq 1-\frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}$$

Ponendo $\alpha = \dfrac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}$ si tratta semplicemente di risolvere l'equazione per ε, visto che tutti gli altri termini sono noti. Pertanto $\varepsilon = \dfrac{\sigma}{\sqrt{n\alpha}}$

$0,01 = \dfrac{39,9}{15\varepsilon^2}$ -> $\varepsilon = \sqrt{\dfrac{39,9}{15 \cdot 0,01}} = 16,310$

Essendo 16,310 l'ampiezza dell'intervallo centrato sul valor medio campionario, l'intervallo di confidenza al 99% è: $\left[68,690 < \mu < 101,30\right]$.

Come era prevedibile, non conoscendo la forma della distribuzione, a parità di livello di confidenza, l'intervallo risulta più ampio.