Esercizio 1.

Viene lanciata una coppia di dadi. Si ottiene lo spazio equiprobabile finito *S* che consta delle 6^2=36 coppie ordinate di numeri compresi tra 1 e 6:

$$S=\{(1,1),(1,2),\dots,(2,1),\dots,(6,6)\}$$

a. Supponendo di assegnare a ciascun punto (a,b) di *S* il massimo tra i suoi valori, sia cioè X(a,b)=max(a,b), calcolare la funzione di probabilità di *f* di X.
b. Supponendo di assegnare a ciascun punto (a,b) di *S* il minimo dei suoi valori, sia cioè Y(a,b)=min(a,b), calcolare la funzione di probabilità *f* di Y.

Svolgimento

Quesito a.

X è una variabile casuale con insieme immagine X(*S*)={1,2,3,4,5,6}. Calcoliamo la funzione di probabilità *f* di X:

$f(1) = P(X=1) = P(\{(1,1)\}) = \frac{1}{36}$

$f(2) = P(X=2) = P(\{(2,1),(2,2),(1,2)\}) = \frac{3}{36}$

$f(3) = P(X=3) = P(\{(3,1),(3,2),(3,3),(2,3),(1,3)\}) = \frac{5}{36}$

$f(4) = P(X=4) = P(\{(4,1),(4,2),(4,3),(4,4),(3,4),(2,4),(1,4)\}) = \frac{7}{36}$

$f(5) = P(X=5) = P(\{(5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,5),(4,5),(3,5),(2,5),(1,5)\}) = \frac{9}{36}$

$f(6) = P(X=6) = P(\{(6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6),(5,6),(4,6),(3,6),(2,6),(1,6)\}) = \frac{11}{36}$

quindi:

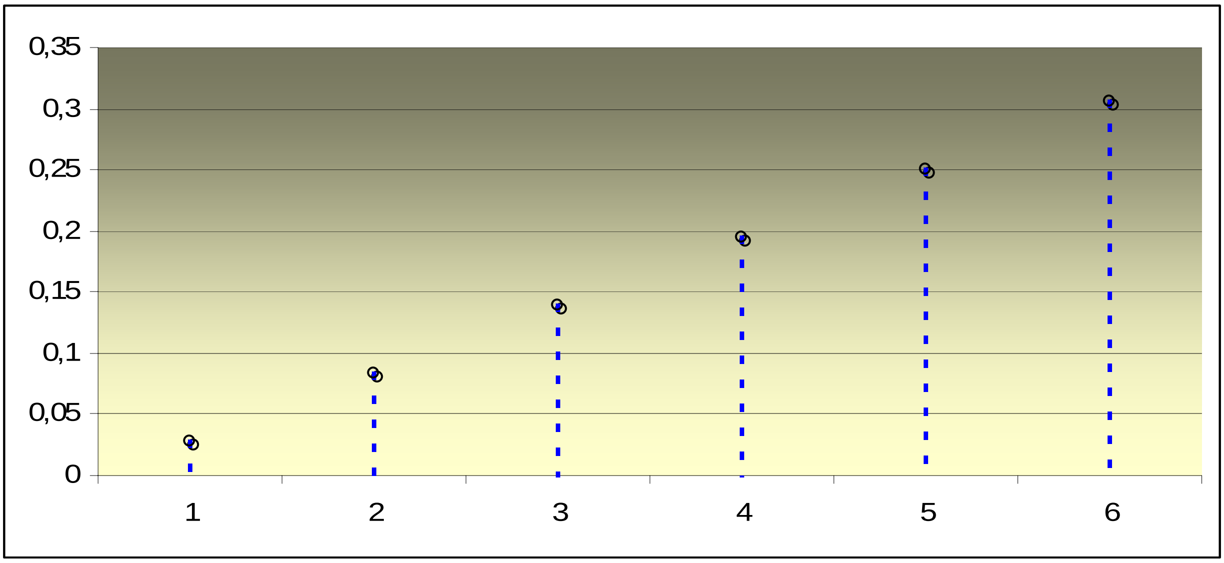
x_i	1	2	3	4	5	6
$F(x_i)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{11}{36}$

$$E(X)=\sum x_i f(x_i) = \frac{1}{36}+\frac{6}{36}+\frac{15}{36}+\frac{28}{36}+\frac{45}{36}+\frac{66}{36}=\frac{161}{36}=4,47$$

$$Var(X)=\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2 f(x_i)=\sum_{i=1}^{n} x_i^2 f(x_i)-\mu^2$$

$$\sum x_i^2 f(x_i)=\left(\frac{1}{36}\right)+\left(4*\frac{3}{36}\right)+\left(9*\frac{5}{36}\right)+\left(16*\frac{7}{36}\right)+\left(25*\frac{9}{36}\right)+\left(36*\frac{11}{36}\right)=21,97$$

$$Var(X) = 21,97 - 4,47^2 = 1,99$$



Funzione di probabilità della v.c. X

Quesito b.
Y è una variabile casuale su *S* con insieme immagine Y(*S*)={1,2,3,4,5,6}

Per calcolare la funzione di probabilità *f* di Y si procede come nel caso precedente:

f(1) = P(Y=1) = P({(6,1),(5,1),(4,1),(3,1),(2,1),(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6)}) = $\frac{11}{36}$

f(2) = P(Y=2) = P({(6,2),(5,2),(4,2),(3,2),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6)}) = $\frac{9}{36}$

f(3) = P(Y=3) = P({(6,3),(5,3),(4,3),(3,3),(3,4),(3,5),(3,6)}) = $\frac{7}{36}$

f(4) = P(Y=4) = P({(6,4),(5,4),(4,4),(4,5),(4,6)}) = $\frac{5}{36}$

f(5) = P(Y=5) = P({(6,5),(5,5),(5,6)}) = $\frac{3}{36}$

f(6) = P(Y=6) = P({(6,6)}) = $\frac{1}{36}$

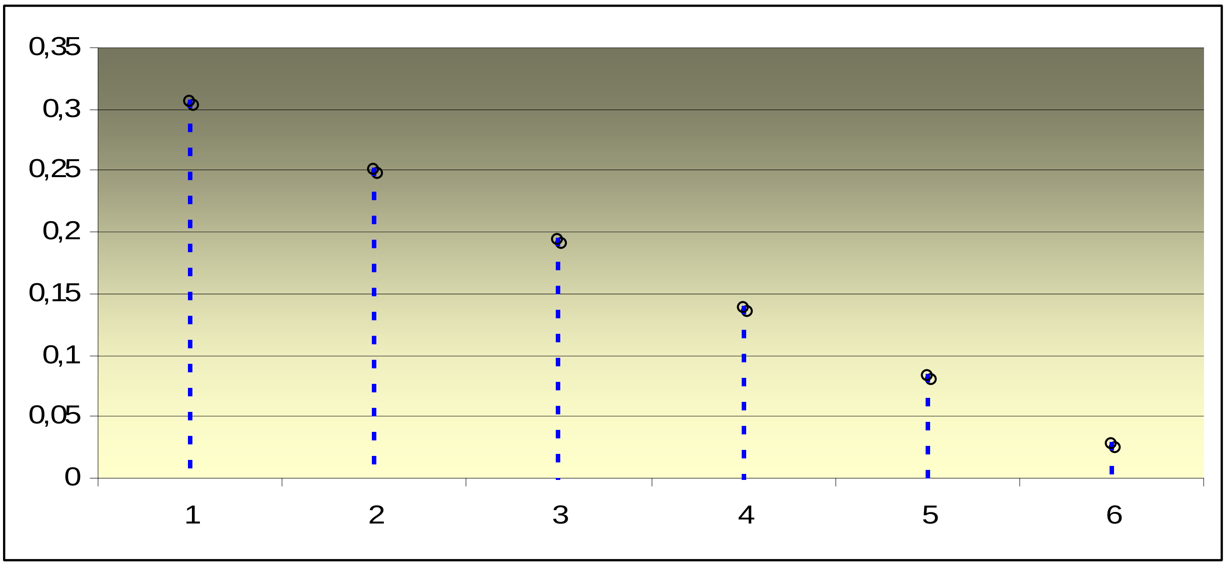
quindi:

y_i	1	2	3	4	5	6
$F(y_i)$	$\frac{11}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{1}{36}$

E(Y)= $\sum y_i f\left(y_i\right) = \frac{11}{36} + \frac{18}{36} + \frac{21}{36} + \frac{20}{36} + \frac{15}{36} + \frac{6}{36} = \frac{91}{36} = 2,53$

$$\sum y_i^2 f(y_i) = \left(\frac{11}{36}\right) + \left(4 * \frac{9}{36}\right) + \left(9 * \frac{7}{36}\right) + \left(16 * \frac{5}{36}\right) + \left(25 * \frac{3}{36}\right) + \left(36 * \frac{1}{36}\right) = 8,36$$

$$Var(y) = 8,36 - 2,53^2 = 1,96$$



Funzione di probabilità della v.c. Y

Esercizio 2

Dato un esperimento casuale consistente nel lancio di tre monete, si consideri la v.c. X = “numero di coppie di testa consecutive”. Determinare:
a) lo spazio campionario;
b) i valori della X;
c) la distribuzione di probabilità;
d) la funzione di distribuzione cumulata;
e) il valore atteso;
f) la varianza.

a

lo spazio campionario S è:
S={(TTT),(TTC),(TCT), (TCC) (CTT), (CTC), (CCT), (CCC)}.

b

P(T) = 1/2

P(T,T,T)= $P(T \cap T \cap T) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$;

P(T,T,C)= $P(T \cap T \cap C) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$

P(T,C,T)= $P(T \cap C \cap T) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$

P(T,C,C)= $P(T \cap C \cap C) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$

P(C,T,T)= $P(C \cap T \cap T) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$

P(C,T,C)= $P(C \cap T \cap C) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$

P(C,C,T)= $P(C \cap C \cap T) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$

P(C,C,C)= $P(C \cap C \cap C) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$

Poiché X denota “numero di coppie di testa consecutive”si ha: X(C,C,C)=0, X(T,C,C)=0, X(C,T,C)=0, X(C,C,T)=0, X(T,C,T)=0, X(T,T,C)=1, X(C,T,T)=1, X(T,T,T)=2.
Pertanto X(*S*)={0,1,2}

$$f(0) = P((CCC) \cup (TCC) \cup (CTC) \cup (CCT) \cup (TCT)) = \frac{5}{8};$$

$$f(1) = P((CTT) \cup (TTC)) = \frac{2}{8};$$

$$f(2) = P(TTT) = \frac{1}{8};$$

La distribuzione di probabilità è:

x_i	0	1	2
$f(x_i)$	$\frac{5}{8}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{1}{8}$

La funzione di ripartizione è:

x_i	0	1	2
$f(x_i)$	$\frac{5}{8}$	$\frac{7}{8}$	1

Il valore atteso è:

$$E(X) = \left(\frac{5}{8}\right) * 0 + \left(\frac{2}{8}\right) * 1 + \left(\frac{1}{8}\right) * 2 = 0{,}5$$

$$Var(X) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2 f(x_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 f(x_i) - \mu^2$$

$\sum x_i^2 f(x_i)$ = (0^2*0,625)+(1^2*0,25)+(2^2*0,125) = 0,75

μ^2 = 0,25

Var(X) = 0,75-0,25 = 0,5

Esercizio 3

Un giocatore lancia due monete. Egli vince 1 oppure 2 euro a seconda che escano 1 oppure 2 teste, ma perde 5 euro se l'evento "testa" non si verifica affatto.

a) determinare le probabilità dei punti dello spazio campionario
b) determinare il valore atteso del gioco; è un gioco equo?
c) determinare la varianza del gioco.

Svolgimento

Quesito a.

P{(T,T)} = $P(T \cap T)$ = 0,25
P{(C,T)} = $P(C \cap T)$ = 0,25
P{(T,C)} = $P(T \cap C)$ = 0,25
P{(C,C)} = $P(C \cap C)$ = 0,25

Pertanto la probabilità di vincere 1 euro è pari a 0,5 la probabilità di vincere 2 euro è pari a 0,25 e la probabilità di perdere 5 euro è pari a 0,25.

Quesito b.

Si possono riassumere i risultati nella seguente tabella:

Esito del gioco	+2	+1	-5
Probabilità	0,25	0,5	0,25

E(X)=(2*0,25)+(1*0,5)-(5*0,25)=-0,25

Il valor medio è -0,25, quindi il gioco non è equo.

Quesito c.

$$Var(X) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2 f(x_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 f(x_i) - \mu^2$$

$\sum x_i^2 f(x_i)$ = (2^2*0,25)+(1^2*0,5)+(5^2*0,25) = 7,75

μ^2 = 0,0625

Var(X) = 7,75-0,0625 = 7,6875

Esercizio 4

Si lanci tre volte una moneta modificata in modo che P(T) = $\frac{3}{4}$. Sia X la v.c. che rappresenta la più lunga sequenza consecutiva di teste che si presentano.

a) determinare la funzione di probabilità di X.
b) determinare il valore atteso e la varianza di X.

Svolgimento

Quesito a.
La v.c. X è definita nello spazio campionario *S* = {TTT,TTC,TCT,TCC,CTT,CTC,CCT,CCC}

P(T,T,T)= $P(T\cap T\cap T)=\left(\frac{3}{4}\right)^3=\frac{27}{64}$;

P(T,T,C)= $P(T\cap T\cap C)=\left(\frac{3}{4}\right)^2\frac{1}{4}=\frac{9}{64}$

P(T,C,T)= $P(T\cap C\cap T)=\left(\frac{3}{4}\right)^2\frac{1}{4}=\frac{9}{64}$

P(T,C,C)= $P(T\cap C\cap C)=\left(\frac{1}{4}\right)^2\frac{3}{4}=\frac{3}{64}$

P(C,T,T)= $P(C\cap T\cap T)=\left(\frac{3}{4}\right)^2\frac{1}{4}=\frac{9}{64}$

P(C,T,C)= $P(C\cap T\cap C)=\left(\frac{1}{4}\right)^2\frac{3}{4}=\frac{3}{64}$

P(C,C,T)= $P(C\cap C\cap T)=\left(\frac{1}{4}\right)^2\frac{3}{4}=\frac{3}{64}$

P(C,C,C)= $P(C\cap C\cap C)=\left(\frac{1}{4}\right)^3=\frac{1}{64}$

Poiché X denota la più lunga sequenza consecutiva di "testa", X(C,C,C)=0, X(T,C,C)=1, X(C,T,C)=1, X(C,C,T)=1, X(T,C,T)=1, X(T,T,C)=2, X(C,T,T)=2, X(T,T,T)=3.
Pertanto X(*S*)={0,1,2,3}

$f(0)=P(C,C,C)=\frac{1}{64}$;

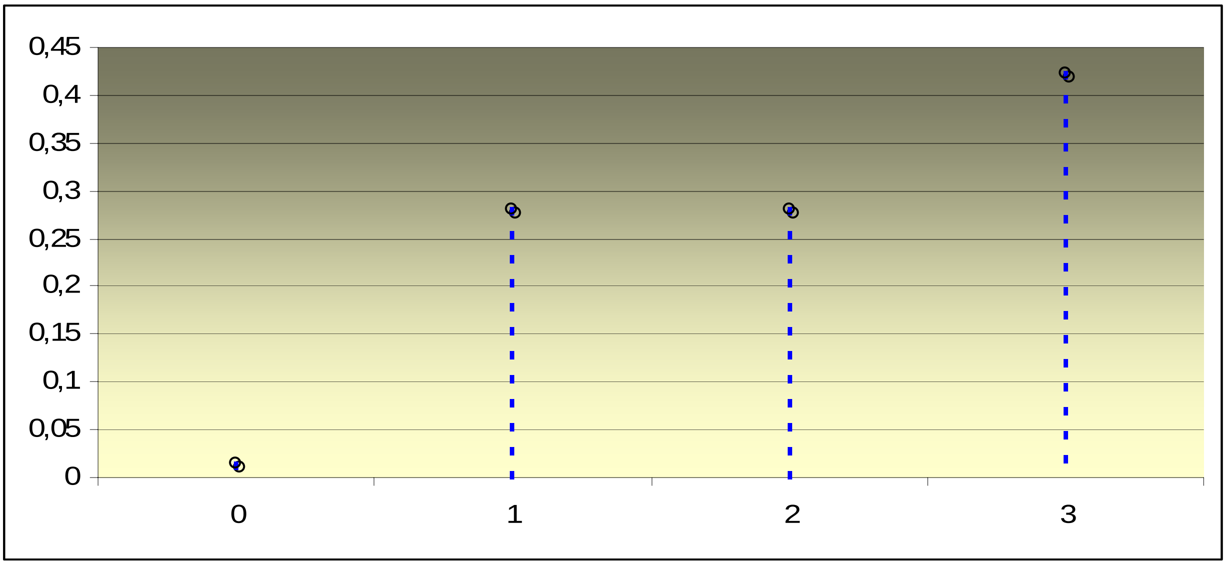
$f(1)=P((T,C,C)\cup(C,T,C)\cup(C,C,T)\cup(T,C,T))=\frac{18}{64}$

$f(2)=P((T,T,C)\cup(C,T,T))=\frac{18}{64}$

$f(3)=P(T,T,T)=\frac{27}{64}$

La funzione di probabilità è:

x_i	0	1	2	3
$f(x_i)$	$\frac{1}{64}$	$\frac{18}{64}$	$\frac{18}{64}$	$\frac{27}{64}$



Funzione di probabilità della v.c. X *più lunga sequenza consecutiva di testa*

Quesito b.

$$E(X) = \left(0 * \frac{1}{64}\right) + \left(1 * \frac{18}{64}\right) + \left(2 * \frac{18}{64}\right) + \left(3 * \frac{27}{64}\right) = \frac{135}{64} = 2{,}1$$

$$Var(X) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2 f(x_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 f(x_i) - \mu^2$$

$$\sum x_i^2 f(x_i) = 0 + \left(1 * \frac{18}{64}\right) + \left(4 * \frac{18}{64}\right) + \left(9 * \frac{27}{64}\right) = \frac{333}{64} = 5{,}2$$

$$\mu^2 = 4{,}41$$

$$Var(X) = 5{,}2 - 2{,}1^2 = 0{,}8$$