Esercitazione 1 del corso di Statistica 2
Prof. Domenico Vistocco

Alfonso Iodice D'Enza

April 26, 2007

1 .....prima di cominciare

Contare, operazione solitamente semplice, può diventare complicata se lo scopo è specificare le probabilità associate agli eventi di uno spazio campione finito. Nelle applicazioni di tipo statistico, le operazioni di conteggio possono risultare anche molto complesse: è possibile tuttavia decomporre il problema iniziale in componenti più piccole per le quali il processo di conteggio risulta più semplice (*teorema fondamentale del conteggio*).

La scelta della modalità con cui si effettua il conteggio dipende da due caratteristiche del problema:

1. lo schema di estrazione: *senza reimmissione*, *con reimmissione*;
2. l'ordine con cui si verificano gli eventi risulta essere influente o meno.

Pertanto, a seconda delle caratteristiche del problema di conteggio affrontato, vale il seguente schema:

	senza reimmissione	*con reimmissione*
ordinati	$\frac{n!}{(n-r)!}$	n^r
non ordinati	$\binom{n}{r}$	$\binom{n+r-1}{r}$

dove n rappresenta il numero di prove, ed r il numero di volte che si verifica l'evento oggetto di conteggio. Il fatto che si tenga conto o meno dell'ordine con cui si verificano gli eventi dipende dal considerare uguali o meno due sequenze che hanno gli stessi elementi disposti in modo diverso. Lo schema di estrazione con reintroduzione rende le estrazioni successive indipendenti tra loro; quando si estrae senza reintroduzione, ad ogni successiva estrazione si restringe lo spazio campione di partenza.

2 Esercizio

Si supponga di avere un urna con 30 numeri e di estrarne 5. Contare i possibili risultati se

1. l'estrazione avviene senza reintroduzione, la sequenza delle estrazioni caratterizza il risultato;
2. l'estrazione avviene con reintroduzione, la sequenza delle estrazioni caratterizza il risultato;
3. l'estrazione avviene senza reintroduzione, la sequenza delle estrazioni non caratterizza il risultato;
4. l'estrazione avviene con reintroduzione, la sequenza delle estrazioni non caratterizza il risultato;

2.1 Svolgimento

Si decompone il problema di estrazione di cinque numeri nelle singole estrazioni.

- l'estrazione avviene senza reintroduzione, la sequenza delle estrazioni caratterizza il risultato;

In prima estrazione ci sono 30 possibili risultati (il numero estratto $\in [1, 30]$); poichè l'estrazione è senza reintroduzione, la seconda estrazione avrà 29 possibili risultati, ..., la quinta sarà infine caratterizzata da 26 possibili risultati. Pertanto, il numero complessivo di possibili estrazioni di cinque numeri è dato da

$$30 \times 29 \times 28 \times 27 \times 26 \tag{1}$$

che corrisponde a

$$\frac{30!}{30-5!} = \frac{30!}{25!} = 17^{'}100^{'}720 \tag{2}$$

- l'estrazione avviene con reintroduzione, la sequenza delle estrazioni caratterizza il risultato;

In questo secondo caso, ciascuna estrazione è indipendente dalle altre, ognuna di esse con 30 possibili risultati

$$30 \times 30 \times 30 \times 30 \times 30 = 30^5 = 24'300'000 \tag{3}$$

- l'estrazione avviene senza reintroduzione, la sequenza delle estrazioni non caratterizza il risultato;

Si consideri caso in cui l'estrazione avviene senza ripetizione e si tiene conto dell'ordine di estrazione ($\frac{n!}{(n-r)!} = \frac{30!}{25!}$); in questo caso due sequenze di elementi uguali, ma con ordinamento diverso, saranno considerate lo stesso risultato. Sapendo che il numero di possibili ordinamenti di una sequenza di r numeri è dato da $r!$, nel nostro caso $5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$, allora dal totale delle sequenze possibili di 5 numeri vanno eliminate le ridondanze, ovvero

$$\frac{30 \times 29 \times 28 \times 27 \times 26}{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} \tag{4}$$

poichè il numeratore corrisponde a $\frac{30!}{(30-5)!}$ e il denominatore a 5!, allora la precedente diventa

$$\frac{30!}{5!(30-5)!} = \frac{n!}{r!(n-r)!} = \binom{n}{r} \tag{5}$$

meglio conosciuto come *coefficiente binomiale.*

- l'estrazione avviene con reintroduzione, la sequenza delle estrazioni non caratterizza il risultato;

Le cose sarebbero facili in questo caso se, ragionando come al punto precedente, potessimo limitarci a fare $\frac{30^5}{5!}$ per eliminare le sequenze ridondanti. Ovviamente non è così. Poichè l'estrazione avviene con reimmissione, tale conteggio può essere effettuato ipotizzando di collocare 5 oggetti in 30 scatole (in una scatola può essere assegnato anche più di un oggetto).

Poste una di fianco all'altra, le scatole sono separate da un bordo comune: su 30 scatole, ci saranno 31 bordi a delimitarle. Il primo e l'ultimo bordo non possono essere spostati e non vengono considerati nel conto delle possibili disposizioni dei markers. Quindi quello che di fatto si va a contare sono i bordi (29) e gli oggetti (5). Quindi il numero di possibili sequenze di 34 oggetti è 34!, tuttavia bisogna eliminare le sequenze ridondanti (stessi elementi ma ordinamenti diversi). Per fare questo, bisogna dividere tanto per 5! che per 29!. Espresso in termini di coefficiente binomiale si ha

$$\frac{34!}{5!(34-5)!} = \frac{n+r-1!}{r!(n+r-1-r)!} = \binom{n+r-1}{r} \tag{6}$$

3 Esercizio

Il proprietario di una concessionaria di auto sportive assume venditori con contratti della durata di un anno. Il rinnovo del contratto è vincolato alle vendite effettuate da ciascun venditore. Sui 300 giorni lavorativi del 2006, un giovane venditore ha riportato le seguenti vendite:

Si consideri la variabile casuale X: *numero di macchine vendute giornalmente.*

1. Definire e rappresentare la funzione di probabilità (probability mass function) per la variabile casuale X
2. Definire e rappresentare la funzione di distribuzione (cumulative distribution function) per la variabile casuale X
3. Calcolare il valore atteso EX della v.c. X
4. Calcolare lo scarto quadratico medio della v.c. X

transazioni	frequenze
0	20
1	80
2	90
3	35
4	26
5	18
6	15
7	12
8	4

Figure 1: Tabella di frequenze della variabile X

X	P_x
0	0.07
1	0.26
2	0.3
3	0.12
4	0.09
5	0.06
6	0.05
7	0.04
8	0.01

Figure 2: Tabella dei valori della funzione di probabilità

5. Calcolare la probabilità che, andando dal concessionario un dato giorno, il venditore concluda fino a tre acquisti

6. Calcolare la probabilità che, andando dal concessionario un dato giorno, il venditore concluda quattro acquisti

3.1 Svolgimento

- Definire e rappresentare la funzione di probabilità (probability mass function) per la variabile casuale X

I valori della funzione di probabilit sono dati, per ciascuna modalità, dal rapporto tra la frequenza assoluta ed il totale delle osservazioni. I valori della distribuzione sono riportate in tabella 2.

[h!]

L'andamento della funzione per punti rappresentato in figura 3.

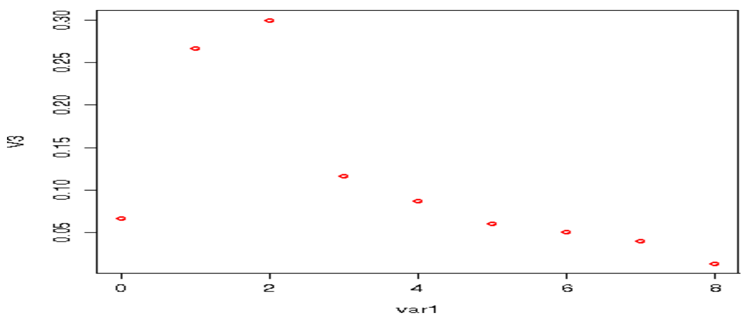

Figure 3: Rappresentazione grafica dei valori della funzione di probabilità

- Definire e rappresentare la funzione di distribuzione (cumulative distribution function) per la variabile casuale X

La funzione di distribuzione cumulata si ottiene cumulando le frequenze relative corrispondenti alle modalit ordinate. I valori della distribuzione sono riportate in tabella 4.

X	F_x
0	0.07
1	0.33
2	0.63
3	0.75
4	0.84
5	0.9
6	0.95
7	0.99
8	1

Figure 4: Tabella dei valori della funzione di distribuzione cumulata

L'andamento della funzione per punti è rappresentato in figura 5.

- Calcolare il valore atteso EX della v.c. X

Il valore atteso della variabile casuale dato da

$$\begin{aligned} E_X = \sum_i P(x_i) &= 0 + 1 * 0.27 + 2 * 0.3 + 3 * 0.12 + 4 * 0.09 + \\ &+ 5 * 0.06 + 6 * 0.05 + 7 * 0.04 + 8 * 0.01 = 2.55 \end{aligned} \tag{7}$$

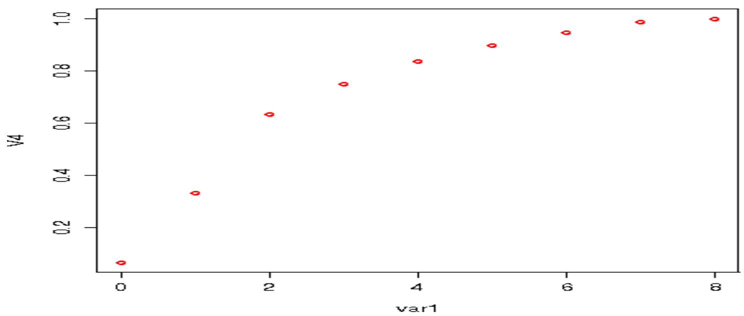

Figure 5: Rappresentazione grafica dei valori della funzione di distribuzione cumulata

- Calcolare lo scarto quadratico medio della v.c. X

La varianza della variabile casuale dato da

$$\begin{aligned}E(X-E_X)^2P(X) = \sum_i (x_i - E_X)^2 P(x_i) = 0 + (1-2.55)^2 * 0.27 + \\ + (2-2.55)^2 * 0.3 + (3-2.55)^2 * 0.12 + (4-2.55)^2 * 0.09 + \\ + (5-2.55)^2 * 0.06 + (6-2.55)^2 * 0.05 + (7-2.55)^2 * 0.04 + \\ + (8-2.55)^2 * 0.01 = 2.997\end{aligned} \tag{8}$$

da cui lo scarto quadratico medio

$$\sigma_X = \sqrt{2.997} = 1.73 \tag{9}$$

- Calcolare la probabilità che, andando dal concessionario un dato giorno, il venditore concluda fino a tre acquisti

$$\begin{aligned}P(X \leq 3) = P\left[(X=0) \cup (X=1) \cup (X=2) \cup (X=3)\right] = \\ = 0.07 + 0.27 + 0.3 + 0.12 = 0.76\end{aligned} \tag{10}$$

- Calcolare la probabilità che, andando dal concessionario un dato giorno, il venditore concluda quattro acquisti

$$P(X=4) = 0.09 \tag{11}$$

4 Esercizio

Ad un campione di 300 lavoratori dipendenti è stato chiesto a chi hanno intezione di destinare il trattamento di fine rapporto. Si definisca l'evento l'*il lavoratore è impiegato presso un ente pubblico* con A_1 e l'evento l'*il lavoratore è impiegato presso una azienda privata* con A_2 ; siano ancora B_1 e B_2 gli eventi *il lavoratore affiderà il TFR all'Inps* e *il lavoratore affiderà il TFR ad una società privata.*

	B_1	B_2	Tot
A_1	94	48	142
A_2	91	67	158
Tot	185	115	300

Sulla base delle risposte ottenute, specificare

1. la probabilità che un intervistato lavori nel privato
2. la probabilità che un intervistato abbia destinato il TFR a privati
3. la probabilità che un intervistato abbia destinato il TFR all'inps oppure che lavori presso un ente pubblico
4. la probabilità che un intervistato affidi il TFR a privati, posto che sia un dipendente pubblico
5. la probabilità che un intervistato affidi il TFR a privati, posto che sia un dipendente privato

4.1 Svolgimento

1. $P(A_2) = \frac{158}{300}$
2. $P(B_2) = \frac{115}{300}$
3. $P(B_1 \cup A_1) = P(B_1) + P(A_1) - P(B_1 \cap A_1) = \frac{142}{300} + \frac{185}{300} - \frac{94}{300} = \frac{243}{300}$
4. $P(B_2 \mid A_1) = \frac{P(B_2 \cap A_1)}{P(A_1)} = \frac{48}{300} \times \frac{300}{142} = \frac{48}{142}$
5. $P(B_2 \mid A_2) = \frac{P(B_2 \cap A_2)}{P(A_2)} = \frac{57}{300} \times \frac{300}{158} = \frac{57}{158}$