Esercitazione 3 del corso di Statistica 2
Prof. Domenico Vistocco

Alfonso Iodice D'Enza

May 15, 2007

1 Esercizio

All'aeroporto Heatrow di Londra atterrano cinque aerei ogni tre minuti:

- qual'è la probabilità che in un minuto non atterri nessun aereo?
- qual'è la probabilità che in un minuto atterrino almeno due aerei?
- qual'è la probabilità che in un minuto atterrino da uno a quattro aerei?

1.1 Svolgimento

La variabile casuale che esprime la probabilità del verificarsi di X eventi in un dato intervallo di tempo è la v.c. di *Poisson* di parametro λ (intensità). Formalmente

$$P(X = x \mid \lambda) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}.$$

Il parametro λ nel caso degli arrivi degli aerei ad Heatrow è dato da $\lambda = \frac{5}{3}$ e corrisponde al numero di aerei che atterrano in media ogni minuto. E' dunque possibile determinare le probabilità richieste:

- *qual'è la probabilità che in un minuto non atterri nessun aereo?*

$$P(X = 0 \mid \frac{5}{3}) = \frac{e^{-\frac{5}{3}}\frac{5}{3}^0}{0!} = e^{-\frac{5}{3}} = 0.189$$

- *qual'è la probabilità che in un minuto atterrino almeno due aerei?*

$$P(X \geq 2 \mid \frac{5}{3}) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) = 1 - \frac{e^{-\frac{5}{3}}\frac{5}{3}^0}{0!} - \frac{e^{-\frac{5}{3}}\frac{5}{3}^1}{1!} =$$
$$= 1 - 0.189 - 0.315 = 0.496$$

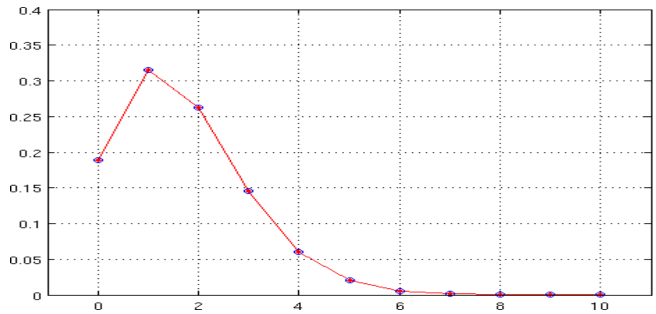

Figure 1: Probability mass function della variabile casuale di Poisson ($\lambda = 5/3$)

- *qual'è la probabilità che in un minuto atterrino da uno a quattro aerei?*

$$
\begin{aligned}
P(1 \leq X \leq 4 \mid \frac{5}{3}) = P(X=1) + P(X=2) + P(X=3) + P(X=4) = \\
& \frac{e^{-\frac{5}{3}} \frac{5}{3}^1}{1!} + \frac{e^{-\frac{5}{3}} \frac{5}{3}^2}{2!} + \\
& + \frac{e^{-\frac{5}{3}} \frac{5}{3}^3}{3!} + \frac{e^{-\frac{5}{3}} \frac{5}{3}^4}{4!} = \\
& = 0.315 + 0.262 + 0.146 + 0.061 = 0.784
\end{aligned}
$$

La funzione di probabilità della distribuzione di Poisson di parametro $\lambda = 5/3$ è riportata in figura 1.

2 Esercizio

Un istituto oceanografico che si occupa del monitoraggio delle specie marine a rischio ha applicato dei transponder al 30% delle tartarughe presenti al largo delle coste della sicilia, lungo le quali è stimata la presenza di 200 esemplari; per tenere sotto controllo lo stato di salute delle tartarughe monitorate, è necessario visitarne 20. Quante tartarughe sarà necessario catturare per trovarne 20 che siano già sotto controllo?

2.1 Svolgimento

In questo caso la v.c. cui fare riferimento è la binomiale negativa, che infatti individua il numero di prove bernoulliane necessarie ad ottenere r successi. In altre parole la v.c. binomiale negativa indica la probabiltà che la taglia del campione da estrarre da una popolazione sia N affinchè una proporzione fissata degli individui estratti sia pari ad r.

$$P(X = x) = \binom{x-1}{r-1} p^r (1-p)^{x-r}$$

Nell'esempio si considera $p = 0.3$, si vuole conoscere la probabilit'a che sarà necessario estarre $X = 30$ tartarughe da analizzare per ottenerne $r = 20$ dotate di transponder. La probabilità sarà quindi data da

$$P(X = 20) = \binom{29}{19} 0.3^{20} (0.7)^{30-20} \simeq 0$$

3 Esercizio

Un recente studio ha rilevato che i tempi di attesa per operazioni allo sportello seguono approssimativamente una distribuzione normale con media di 20 minuti e scarto quadratico medio pari a 3 minuti. Si calcoli la probabilità che il tempo di attesa:

- superi superi i 25 minuti
- sia inferiore ai 16 minuti
- sia compreso tra i 18 e i 21 minuti

3.1 Svolgimento

- superi i 25 minuti

Per individuare la probabilità richiesta è necessario inizialmente standardizzare la variabile
$z = \frac{X-\mu}{\sigma} = \frac{25-20}{3} = 1.67 P(X \geq 25) = P(Z \geq 1.67) = 1-(Z \leq 1.67) = 0.0475$
pertanto

- sia inferiore ai 16 minuti

$$P(X \leq 16) = P(Z \leq \frac{16-20}{3}) = 1 - P(Z \leq 1.33) = 0.092$$

- sia compreso tra i 18 e i 21 minuti

In questo caso i valori estremi dell'intervallo considerati devono essere standardizzati:

$$P(X \leq 18) = P(Z \leq \frac{18-20}{3}) = 1 - P(Z \leq 0.67) = 0.25$$

$$P(X \leq 16) = P(Z \leq \frac{21-20}{3}) = P(Z \leq 0.33) = 0.63$$

$$P(18 \geq X \geq 21) = 0.25 - 0.63 = 0.38$$

4 Esercizio

Il gestore di un punto-ristoro in un'area di servizio ha registrato la spesa fatta da ciacscun cliente nell'mese. È stato rilevato che la spesa media pro-capite è stata di 5 euro con variabilità espressa da uno scarto quadratico di medio di 1,5 euro.

- Indicare primo, secondo e terzo quartile della distribuzione

4.1 Svolgimento

- Indicare il primo quartile della distribuzione

Data la funzione di distribuzione cumulata F_X, il primo quartile Q_1 è tale che $F_X(Q_1) = P(X \leq Q_1) = 0.25$. Pertanto dalle tavole della normale standard si deve trovare il valore di z corrispondente ad una probabilità di 0.25. Dalla simmetria della normale standard rispetto allo 0 segue che $Q_{z3} = -Q_{z1}$, con Q_3 tale che $F_X(Q_3) = P(X \leq Q_3) = 0.75$ e Q_{z3} valore di z corrispondente al terzo quartile. Il valore del terzo quartile è

$$z = 0.675 \text{ essendo } z = \frac{x - \mu_x}{\sigma} \text{ segue che } x = z\sigma + \mu$$
$$\text{il valore cercato è, dunque, } x = Q_3 = 0.675 * 1.5 + 5 = 6.012$$

Ricordando che nel caso della normale standard $Q_{z3} = -Q_{z1}$, segue che

$Q_{z1} = -0.675$ da cui $x = z\sigma + \mu$ il valore cercato è $x = Q_1 = -0.675 * 1.5 + 5 = 3.985$

Infine, dalla simmetria della curva normale segue che $\mu = Me = Mo$, quindi $Q_2 = Me = \mu = 5$.