Esercitazione 8

A. Iodice

Esercitazione 8

Statistica

Alfonso Iodice D'Enza

iodicede@unina.it

Università degli studi di Cassino

Outline

Outline

Outline

Outline

Outline

Le regole di conteggio

Il teorema fondamentale del conteggio

Contare, operazione solitamente semplice, può diventare complicata se lo scopo è specificare le probabilità associate agli eventi di uno spazio campione finito. Per semplificare le operazioni di conteggio più articolate, si ricorre al teorema fondamentale del conteggio in base al quale se si eseguono un esperimento è composto da r esperimenti semplici, ciascuno dei quali ammette rispettivamente $n_1, n_2, \ldots, n_r$, allora l'esperimento complessivo avrà $n_1 \times n_2 \times \ldots \times n_r$ esiti possibili.

Aspetti del problema da considerare

La scelta della modalità con cui si effettuare il conteggio dipende da due caratteristiche del problema:

- Il verificarsi di un evento è indipendente o meno dal verificarsi degli altri (es.lo schema di estrazione: *senza reimmissione*, *con reimmissione*);
- l'ordine con cui si verificano gli eventi risulta essere influente o meno.

Combinazioni e permutazioni

Si considerino due gruppi, ad esempio $\{a, b, c\}$ e $\{c, a, b\}$: se l'ordine degli elementi conta, i due gruppi rappresentano due risultati diversi le due triplette sono permutazioni; viceversa le due triplette rappresentano lo stesso risultato e si definiscono combinazioni.

Schema di conteggio

A seconda delle caratteristiche del problema di conteggio affrontato, vale il seguente schema:

	senza reimmissione	*con reimmissione*
ordinati	$\frac{n!}{(n-r)!}$	n^r
non ordinati	$\binom{n}{r}$	$\binom{n+r-1}{r}$

- n: numero di prove considerato
- r: numero di volte che si verifica l'evento oggetto di conteggio
- ordine: se l'ordine conta, allora due sequenze di risultati aventi ordine diverso saranno considerati eventi differenti.

Esercizio 1

Si supponga di avere un urna con 30 numeri e di estrarne 5. Contare i possibili risultati se

1. l'estrazione avviene senza reintroduzione, la sequenza delle estrazioni caratterizza il risultato;
2. l'estrazione avviene senza reintroduzione, la sequenza delle estrazioni non caratterizza il risultato;
3. l'estrazione avviene con reintroduzione, la sequenza delle estrazioni caratterizza il risultato;
4. l'estrazione avviene con reintroduzione, la sequenza delle estrazioni non caratterizza il risultato;

Esercizio 1

Si decompone il problema di estrazione di cinque numeri nelle singole estrazioni.

- l'estrazione avviene senza reintroduzione, la sequenza delle estrazioni caratterizza il risultato;

	senza reimmissione	*con reimmissione*
ordinati	$\frac{n!}{(n-r)!}$	n^r
non ordinati	$\binom{n}{r}$	$\binom{n+r-1}{r}$

In prima estrazione ci sono 30 possibili risultati (il numero estratto $\in [1, 30]$); poichè l'estrazione è senza reintroduzione, la seconda estrazione avrà 29 possibili risultati, . . ., la quinta sarà infine caratterizzata da 26 possibili risultati. Pertanto, il numero complessivo di possibili estrazioni di cinque numeri è dato da $30\times 29 \times 28 \times 27 \times 26$(0)che corrisponde a

$$\frac{n!}{(n-r)!} = \frac{30!}{(30-5)!} = \frac{30!}{25!} = 17100720$$

Esercizio 1

Si decompone il problema di estrazione di cinque numeri nelle singole estrazioni.

- l'estrazione avviene senza reintroduzione, la sequenza delle estrazioni non caratterizza il risultato;

	senza reimmissione	*con reimmissione*
ordinati	$\frac{n!}{(n-r)!}$	n^r
non ordinati	$\binom{n}{r}$	$\binom{n+r-1}{r}$

Nel caso in cui l'estrazione avviene senza ripetizione e si tiene conto dell'ordine di estrazione, i possibili esiti (sequenze di estrazioni) sono ($\frac{n!}{(n-r)!} = \frac{30!}{25!}$); Nel presente caso due sequenze di elementi uguali, ma con ordinamento diverso, sono considerate lo stesso risultato: dal totale delle sequenze possibili di 5 numeri vanno eliminate le ridondanze. Sapendo che il numero di possibili ordinamenti di una sequenza di r numeri è dato da $r!$, nel caso in esempio $5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$, allora , il conteggio è dato da

$$\frac{30 \times 29 \times 28 \times 27 \times 26}{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = \frac{\frac{30!}{(30-5)!}}{5!}$$

vale a dire

$$\frac{30!}{5!(30-5)!} = \frac{n!}{r!(n-r)!} = \binom{n}{r}$$

meglio conosciuto come *coefficiente binomiale*.

Esercizio 1

- l'estrazione avviene con reintroduzione, la sequenza delle estrazioni caratterizza il risultato;

	senza reimmissione	*con reimmissione*
ordinati	$\frac{n!}{(n-r)!}$	n^r
non ordinati	$\binom{n}{r}$	$\binom{n+r-1}{r}$

Si tratta del caso più semplice: ciascuna estrazione è indipendente dalle altre, ognuna di esse con 30 possibili risultati

$$n^r = 30^5 = 30 \times 30 \times 30 \times 30 \times 30 = 24300000$$

Esercizio 1

- l'estrazione avviene con reintroduzione, la sequenza delle estrazioni caratterizza il risultato;

	senza reimmissione	*con reimmissione*
ordinati	$\frac{n!}{(n-r)!}$	n^r
non ordinati	$\binom{n}{r}$	$\binom{n+r-1}{r}$

Poichè l'estrazione avviene con reimmissione, tale conteggio può essere effettuato ipotizzando di collocare 5 oggetti in 30 scatole (in una scatola può essere assegnato anche più di un oggetto).
Poste una di fianco all'altra, le scatole sono separate da un bordo comune: su 30 scatole, ci saranno 31 bordi a delimitarle. Il primo e l'ultimo bordo non possono essere spostati e non vengono considerati nel conto delle possibili disposizioni dei markers. Quindi quello che di fatto si va a contare sono i bordi (29) e gli oggetti (5). Quindi il numero di possibili sequenze di 34 oggetti è $34!$, tuttavia bisogna eliminare le sequenze ridondanti (stessi elementi ma ordinamenti diversi). Per fare questo, bisogna dividere tanto per $5!$ che per $29!$. Espresso in termini di coefficiente binomiale si ha

$$\frac{34!}{5!(34-5)!} = \frac{n+r-1!}{r!(n+r-1-r)!} = \binom{n+r-1}{r} \tag{1}$$

Esercizio 2

Il proprietario di una concessionaria di auto sportive assume venditori con contratti della durata di un anno. Il rinnovo del contratto è vincolato alle vendite effettuate da ciascun venditore. Sui 300 giorni lavorativi del 2006, un giovane venditore ha riportato le seguenti vendite:

transazioni	frequenze
0	20
1	80
2	90
3	35
4	26
5	18
6	15
7	12
8	4

Si consideri la variabile casuale X: *numero di macchine vendute giornalmente*.

1. Definire e rappresentare la funzione di probabilità (probability mass function) per la variabile casuale X
2. Definire e rappresentare la funzione di distribuzione (cumulative distribution function) per la variabile casuale X
3. Calcolare il valore atteso EX della v.c. X
4. Calcolare lo scarto quadratico medio della v.c. X
5. Calcolare la probabilità che, andando dal concessionario un dato giorno, il venditore concluda fino a tre acquisti
6. Calcolare la probabilità che, andando dal concessionario un dato giorno, il venditore concluda quattro acquisti

Esercizio 2

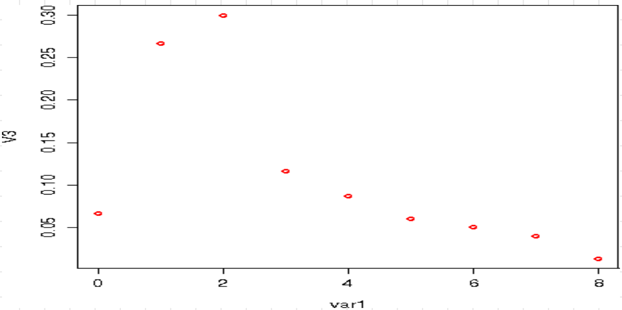
- Definire e rappresentare la funzione di probabilità (probability mass function) per la variabile casuale X

I valori della funzione di probabilità sono dati, per ciascuna modalità, dal rapporto tra la frequenza assoluta ed il totale delle osservazioni. I valori della distribuzione sono riportate in tabella 1.

X	P_x
0	0.07
1	0.26
2	0.3
3	0.12
4	0.09
5	0.06
6	0.05
7	0.04
8	0.01

Esercizio 2

L'andamento della funzione per punti rappresentato in figura 2.



Esercizio 2

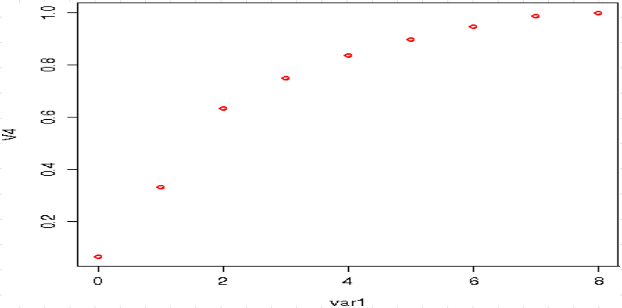
- Definire e rappresentare la funzione di distribuzione (cumulative distribution function) per la variabile casuale X

La funzione di distribuzione cumulata si ottiene cumulando le frequenze relative corrispondenti alle modalit ordinate. I valori della distribuzione sono riportate in tabella 3.

X	F_x
0	0.07
1	0.33
2	0.63
3	0.75
4	0.84
5	0.9
6	0.95
7	0.99
8	1

Esercizio 2

L'andamento della funzione di probabilità cumulata è rappresentato in figura 4.



Esercizio 2

- Calcolare il valore atteso EX della v.c. X

Il valore atteso della variabile casuale dato da

$$E_X = \sum_i x_i P(x_i) = 0 + 1 * 0.27 + 2 * 0.3 + 3 * 0.12 + 4 * 0.09 +$$
$$+ 5 * 0.06 + 6 * 0.05 + 7 * 0.04 + 8 * 0.01 = 2.55$$

- Calcolare lo scarto quadratico medio della v.c. X

La varianza della variabile casuale dato da

$$E(X - E_X)^2 P(X) = \sum_i (x_i - E_X)^2 P(x_i) = 0 + (1 - 2.55)^2 * 0.27 +$$
$$+ (2 - 2.55)^2 * 0.3 + (3 - 2.55)^2 * 0.12 + (4 - 2.55)^2 * 0.09 +$$
$$+ (5 - 2.55)^2 * 0.06 + (6 - 2.55)^2 * 0.05 + (7 - 2.55)^2 * 0.04 +$$
$$+ (8 - 2.55)^2 * 0.01 = 2.997$$

da cui lo scarto quadratico medio

$$\sigma_X = \sqrt{2.997} = 1.73$$

Esercizio 2

- Calcolare la probabilità che, andando dal concessionario un dato giorno, il venditore concluda fino a tre acquisti

$$P(X \leq 3) = P\left[(X = 0) \cup (X = 1) \cup (X = 2) \cup (X = 3)\right] = \\ = 0.07 + 0.27 + 0.3 + 0.12 = 0.76$$

- Calcolare la probabilità che, andando dal concessionario un dato giorno, il venditore concluda quattro acquisti

$$P(X = 4) = 0.09$$

Esercizio 3

Si consideri il gioco del poker: ciascun giocatore ha in mano 5 carte servite da un mazzo di 52 carte francesi. Si indichi

- Calcolare il numero di mani distinte che un giocatore può ricevere.
- Calcolare la probabilità di avere un poker d'assi servito.
- Calcolare la probabilità di avere un poker servito.
- Calcolare la probabilità di avere esattamente una coppia.

Esercizio 3

- Calcolare il numero di mani distinte che un giocatore può ricevere.

Per calcolare tale numero di mani si fa ricorso alla regola di conteggio: ciascuna carta non viene reintrodotta nel mazzo, inoltre, l'ordine con il quale il giocatore riceve le carte non influenza il punteggio della mano. Dunque per calcolare le possibili mani si ricorre al coefficiente binomiale $\binom{n}{r}$ con $n = 52$ e $r = 5$.

$$\binom{n}{r} = \binom{52}{5} = 2598960$$

Esercizio 3

- Calcolare la probabilità di avere un poker d'assi servito.

Per calcolare tale probabilità è necessario specificare il numero di mani che presentino 4 assi. Se 4 carte su 5 sono assi, le possibili mani si differenzierano solo per la quinta carta. Le possibili 'quinte carte' sono $52 - 4 = 48$, ovvero le 52 carte meno i 4 assi. Dunque

$$P(poker d'assi) = \frac{48}{2598960}$$

Esercizio 3

- Calcolare la probabilità di avere un poker servito.

Ricorrendo al teorema fondamentale del conteggio si scompone il calcolo nei due sottoproblemi: ci sono 13 possibili carte (dall'asso al Re) che compongono il generico poker. Una volta stabilita la carta, il problema diventa lo stesso del punto precedente: ci saranno dunque 48 possibili mani aventi quattro carte uguali. Le possibili mani per un poker sono dunque: $13 \times 48 = 624$. Pertanto

$$P(poker) = \frac{13 \times 48}{2598960} = \frac{624}{2598960}$$

Esercizio 3

- Calcolare la probabilità di avere esattamente una coppia.

Ricorrendo al teorema fondamentale del conteggio si scompone il calcolo nei seguenti sottoproblemi:

- le carte che formano la coppia possono essere specificate in 13 modi diversi
- definito di che carta si tratta (dall'asso al Re), ci sono $\binom{4}{2}$ possibili coppie
- le altre possibili combinazioni di 3 carte che completano la mano sono $\binom{12}{3}$ (n.b. 12=13-1, perchè si tiene conto della carta che compone la coppia)
- definite le possibili 3 carte, se ne stabilisce il seme, ovvero 4^3

Dunque le possibili mani che contengono una coppia sono
$13 \times \binom{4}{2} \times \binom{12}{3} \times 4^3 = 1098249$

$$P(coppia) = \frac{1098249}{2598960} = 0.422$$