Esercitazione 7 del corso di Statistica 2
Prof. Domenico Vistocco

Alfonso Iodice D'Enza

June 13, 2007

1 Esercizio

In un esperimento per verificare eventuali capacità extrasensoriali di un soggetto A si procede nel seguente modo: si consegna un mazzo di 50 carte di colore rosso e blu. La prova per il soggetto A consiste nell'indovinare il colore della carta scelta da un soggetto B che si trova in un'altra stanza. Se il soggetto A indovina 32 carte, è possibile sostenere che si tratta di un fenomeno paranormale, ad un livello di significatività del 5%?

1.1 Svolgimento

La probabilità che un soggetto indovini se la carta è blu o rossa è $p = 0.5$. L'ipotesi nulla è che il soggetto A provi semplicemente ad indovinare le scelte di B; l'ipotesi alternativa ‘e che il soggetto A abbia effettivamente delle capacità extrasensoriali. Formalmente,

- $H_0 : p = 0.5$
- $H_1 : p > 0.5$

Il test è unidirezionale dal momento che si è interessati a che il soggetto A abbia prestazioni superiori al semplice ‘tirare ad indovinare’. Sotto ipotesi nulla, vale a dire per $p = 0.5$, media e scarto quadratico medio valgono rispettivamente

$\mu = Np = 50 \times 0.5 = 25$ e $\sigma = \sqrt{Np(1-p)} = \sqrt{50 \times 0.5 \times 0.5} = \sqrt{12.5} = 3.54$

ad un livello di significatività del 5% bisogna scegliere z_c tale che $P(Z \leq z_c) = 0.95$. Pertanto $z_c = 1.645$. In base ai risultati dell'esperimento, il valore osservato z_o corrisponde

$$z_o = \frac{32 - 25}{3.54} = 1.98$$

poichè risulta essere $z_o > z_c$ ($1.98 > 1.645$), si rigetta l'ipotesi nulla per la quale il soggetto A ha tirato ad indovinare.

2 Esercizio

Un macchinario produce batterie al lithio che hanno una durata di vita media di 3 anni con uno scarto quadratico medio di 1 anno. Estratto il seguente campione di $N = 5$ batterie caratterizzate da una durata pari a

$$1.9, 2.4, 3, 3.5, 4.2$$

si vuole verificare, ad un livello di significatività del 5%, se la varianza dichiarata per le batterie prodotte dal macchinario sia effettivamente pari ad 1.

2.1 Svolgimento

Le ipotesi possono essere formalizzate nel seguente modo

- $H_0 : \sigma^2 = 1$
- $H_1 : \sigma^2 \neq 1$

La statistica a cui fare riferimento è la seguente:

$$y = \frac{\hat{S}^2}{\sigma_o^2}(N-1) \text{ dove } \hat{S}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i - \bar{x}}{N-1}$$

Tale statistica si distribuisce come una variabile casuale χ^2 con $N-1$ gradi di libertà. Essendo $N - 1 = 4$ e il test bidirezionale, gli estremi della regione di accettazione sono

$$\chi^2_{\frac{1-\alpha}{2},4} = \chi^2_{0.975,4} = 0.48 \text{ e } \chi^2_{\frac{\alpha}{2},4} = \chi^2_{0.025,4} = 11.14$$

Per decidere se rigettare o meno l'ipotesi nulla bisogna verificare se il valore osservato della statistica sia compreso o meno nei limiti della regione di accettazione. In particolare, dai dati campionari risulta essere

$$y_o = \frac{\hat{S}^2}{\sigma_o^2}(N-1) = \frac{0.9}{1} \times 4 = 3.6$$

Poichè il valore osservato è compreso nei limiti della regione di accettazione, ovvero $0.48 < 3.6 < 11.14$, si accetta l'ipotesi nulla e, di conseguenza, si attesta che la varianza della durata delle batterie prodotte non si discosta significativamente da 1.

3 Esercizio

In un laboratorio che produce meccanica di precisione, un macchinario produce bulloni: il diametro medio di ciascun bullone è di $0.574cm$, mentre lo scarto quadratico medio è $\sigma = 0.008cm$. L'addetto al controllo della produzione

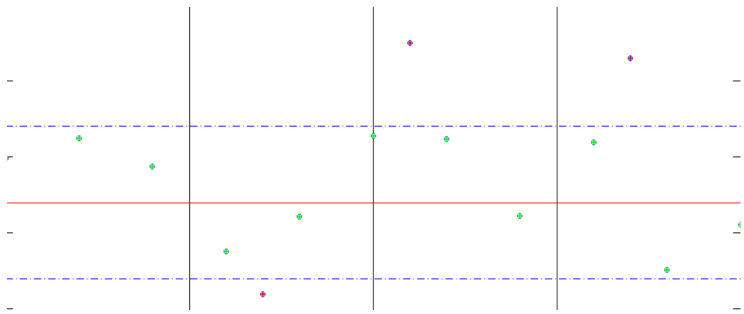

Figure 1: Carta di controllo - *Control Chart*

esamina 6 bulloni ogni due ore e verifica se il diametro medio dei bulloni estratti differisce significativamente dalle specifiche del macchinario (diametro medio= 0.574).
Specificare una regola per la quale si possa essere pressocchè certi che i bulloni prodotti siano conformi alle specifiche.

3.1 Svolgimento

È possibile far corrispondere l'espressione 'pressocchè certi' con una probabilità del 99.73% che la media campionaria $\bar{X}$ sia compresa in un intervallo di estremi $(\mu_{\bar{X}} - 3\sigma_{\bar{X}}, \mu_{\bar{X}} + 3\sigma_{\bar{X}})$: l'area al di sotto della funzione di densità normale (distribuzione della media campionaria) corrispondente a tale intervallo è infatti pari a 0.9973. Gli estremi di tale intervallo sono dunque

$$\mu_{\bar{X}} - 3\sigma_{\bar{X}} = \mu_{\bar{X}} - 3\frac{\sigma}{\sqrt{N}} = 0.574 - \frac{0.024}{\sqrt{6}} = 0.574 - 0.0098 = 0.574 - 0.01 = 0.564$$

$$\mu_{\bar{X}} + 3\sigma_{\bar{X}} = \mu_{\bar{X}} + 3\frac{\sigma}{\sqrt{N}} = 0.574 + \frac{0.024}{\sqrt{6}} = 0.574 + 0.0098 = 0.574 + 0.01 = 0.584$$

Avendo stabillito i limiti entro i quali si desidera che rimanga compresa la media dei campioni di 6 elementi estratti ogni due ore, è possibile rappresentare graficamente la carta di controllo, come mostrato in figura 1. Nella figura sono mostrati tre fuori controllo (punti esterni alla banda di controllo delimitate dalle rette in blu).

4 Esercizio

Per testare l'efficacia di un farmaco nella cura di una malattia si considera un campione di 200 pazienti, li si suddivide in due gruppi (A e B). Al gruppo A viene somministrato il farmaco, al gruppo B no; si osserva poi, per ciascun gruppo, il numero di pazienti guariti. I risultati della prova sono riassunti nella seguente tabella

	guariti	non guariti	tot.
gruppo A	75	25	100
gruppo B	65	35	100
tot	140	60	200

Table 1: Appartenenza ai gruppi vs. guariti (non guariti).

	guariti	non guariti	tot.
gruppo A	70	30	100
gruppo B	70	30	100
tot	140	60	200

Table 2: Frequenze attese sotto l'ipotesi di indipendenza

A partire da tale esperimento, si costruisca un test per valutare l'efficacia del farmaco nella cura della malattia.

4.1 Svolgimento

Per stabillire se il farmaco sia o meno curativo si può sottoporre la verifica di ipotesi che le due variabili *gruppo di appartenenza* e *guarigione dalla malattia* siano o meno indipendenti: se così dovesse risultare, ovvero che la guarigione dalla malattia non è influenzata dalla assunzione del farmaco, si potrebbe concludere che il farmaco è inefficace. Formalmente

- H_0 : le variabili considerate sono indipendenti.
- H_1 : le variabili considerate non sono indipendenti.

La fine di calcolare l'indice quadratico di connessione è necessario calcolare le frequenze che ci si attenderebbe se, fissati i marginali di tabella, le variabili fossero indipendenti.

Si passa a calcolare l'indice quadratico di connessione

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{h}\sum_{j=1}^{k}\frac{(n_{ij}-\hat{n_{ij}})^2}{\hat{n_{ij}}} = \frac{(75-70)^2}{70}+\frac{(25-30)^2}{30}+\frac{(65-70)^2}{70}+\frac{(35-30)^2}{30} = 2.38$$

La statistica appena calcolata si distribuisce secondo una v.c. *chi-quadro* con $min(h-1,k-1)=1$ grado di libertà. Ad un livello di significatività del 5% e con 1 g.d.l. il valore critico è $\chi^2_{0.95,1}=3.84$. Poichè il valore osservato della statistica è minore del valore critico ($2.38 < 3.84$), non si può rigettare l'ipotesi nulla: di conseguenza non si può sostenere che il farmaco abbia effetti sulla cura della malattia.

X	Y	X^2	Y^2	XY	$\hat{Y} = b_0 + b_1 X$
65	68	4225	4624	4420	66.7600
63	66	3969	4356	4158	65.8080
67	68	4489	4624	4556	67.7120
64	65	4096	4225	4160	66.2840
68	69	4624	4761	4692	68.1880
62	66	3844	4356	4092	65.3320
70	68	4900	4624	4760	69.1400
66	65	4356	4225	4290	67.2360
68	71	4624	5041	4828	68.1880
67	67	4489	4489	4489	67.7120
69	68	4761	4624	4692	68.6640
71	70	5041	4900	4970	69.6160
$\sum X = 800$	$\sum Y = 811$	$\sum X^2 = 53410$	$\sum Y^2 = 54849$	$\sum XY = 54107$	

Table 3: Tabella di valori per lo studio della dipendenza del peso dei padri da quello dei figli.

5 Esercizio

Si consideri di aver osservato il peso di un campione di 12 padri con i rispettivi figli. Si studi la dipendenza del peso dei figli da quello dei padri. I dati sono riportati in tabella 3.

5.1 Svolgimento

Dal metodo dei minimi quadrati le stime dei coefficienti per la retta di regressione sono

$$b_0 = \bar{Y} - b_1 \bar{X} \text{ e } b_1 = \frac{Cov(X,Y)}{VarX} = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X^2}$$

Tuttavia è possibile usare le seguenti formule alternative che semplificano i calcoli:

$$b_0 = \frac{(\sum Y)(\sum X^2) - (\sum X)(\sum XY)}{N \sum X^2 - (\sum X)^2} \text{ e } b_1 = \frac{N \sum XY - (\sum X \sum Y)}{N \sum X^2 - (\sum X)^2}$$

Sulla base dei dati riportati in tabella i coefficienti sono rispettivamente

$$b_0 = \frac{(\sum Y)(\sum X^2) - (\sum X)(\sum XY)}{N \sum X^2 - (\sum X)^2} = \frac{(811)(53418) - (800)(54107)}{(12)53418 - 640000} = \frac{36398}{1016} = 35.82$$

$$b_1 = \frac{N \sum XY - (\sum X \sum Y)}{N \sum X^2 - (\sum X)^2} = \frac{12(54107) - (800)(811)}{(12)53418 - 640000} = \frac{484}{1016} = 0.476$$

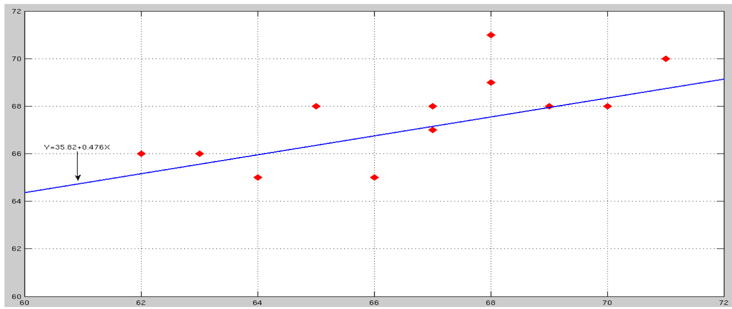

Figure 2: Retta di regressione

Pertanto l'equazione della retta di regressione è data da

$$\hat{Y} = 35.82 + 0.476X$$

I valori stimati del peso dei figli rispetto a quello dei padri sono riportati nell'ultima colonna della tabella 3. In figura 2 è riportato lo scatter plot dei punti osservati e la corrispondente retta di regressione.
Per ottenere l'errore standard delle stime basta fare la media aritmetica delle differenze quadratiche tra i valori di Y osservati e quelli stimati. Pertanto,

$$\begin{aligned} S^2_{Y,X} = \sum_{i=1} N \frac{(Y - \hat{Y})}{N} &= \frac{1}{N}\left[(68 - 66.76)^2 + \ldots + (70 - 69.616)^2\right] = \\ = \frac{1}{N}\left[(1.24)^2 + \ldots + (0.384)^2\right] = 1.643 \end{aligned}$$

Da cui possiamo ricavare l'errore standard $S_{Y,X} = \sqrt{1.643} = 1.28$.

La devianza totale di Y è composta di devianza di regressione e devianza residua, come segue

$$\begin{aligned} Dev_{Totale} &= \sum (y_i - \bar{y})^2 = 38.92 \\ Dev_{Residua} &= \sum (y_i - \hat{y}_i)^2 = 19.70 \\ Dev_{Regres.} &= \sum (\hat{y}_i - \bar{y})^2 = 19.22. \end{aligned}$$

È possibile fare inferenza sui parametri del modello della retta di regressione. Si supponga ad esempio di voler sottoporre a verifica di ipotesi il coefficiente angolare della retta di regressione, sostenendo che, riferito alla popolazione, esso valga 0.18.

Siano le ipotesi

- $H_0 : b_1 = 0.18$
- $H_1 : b_1 \neq 0.18$

La statistica test da considerare è

$$t = \frac{b_1 - 0.18}{S_{Y,X}/S_X}\sqrt{N-2}$$

che segue la distribuzione di Student con $N-2$ gradi di libertà. Il valore osservato di t è pertanto

$$t_o = \frac{b_1 - 0.18}{S_{Y,X}/S_X}\sqrt{N-2} = \frac{0.476 - 0.18}{1.28/2.66}\sqrt{12-2} = 1.95$$

Il corrispondente valore critico ad un livello di significatività del 5% è $t_{0.95,10} = 1.81$. Poichè risulta $t_o > t_c$, si rigetta l'ipotesi nulla.