



Esercitazione
15

A. Iodice

Verifica di
ipotesi

Esercizio 1

Esercizio 2

Esercizio 3

Esercizio 4

Esercitazione 15

Statistica

Alfonso Iodice D'Enza
iodicede@unina.it

Università degli studi di Cassino



Esercitazione
15

A. Iodice

Verifica di
ipotesi

Esercizio 1

Esercizio 2

Esercizio 3

Esercizio 4

1 Verifica di ipotesi

- Esercizio 1
- Esercizio 2
- Esercizio 3
- Esercizio 4



Ex.1: Verifica Ipotesi sulla media

Esercitazione
15

A. Iodice

Verifica di
ipotesi

Esercizio 1

Esercizio 2

Esercizio 3

Esercizio 4

Le funi prodotte da un certo macchinario hanno una resistenza media alla rottura pari a $\mu = 1800N$ con una variabilità (scarto quadratico medio) $\sigma = 100N$. In seguito ad una modifica nel processo produttivo, si ritiene che la resistenza alla rottura delle funi prodotte sia migliorata. Per verificare tale miglioramento è stato analizzato un campione di $n = 50$ funi di nuova produzione. La resistenza nuova osservata è stata $\bar{X} = 1850N$. Verificare ad un livello di significatività del $\alpha = 0.01$ che il vi sia un effettivo miglioramento nella resistenza delle funi.

Svolgimento

L'effetto del nuovo processo produttivo è positivo se si traduce in un aumento della resistenza media alla rottura delle funi prodotte. Formalmente,

- $H_0 : \mu = 1800$
- $H_1 : \mu > 1800$



Il test è unidirezionale, si è interessati a che la statistica test costruita in base alla media osservata. In particolare la statistica di interesse è

$$Z_{oss} = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{1850 - 1800}{100/\sqrt{50}} = 3.55$$

Per verificare se l'ipotesi nulla sia da rifiutare o meno è necessario confrontare il valore della statistica osservata con il valore critico $Z_c = Z_{1-\alpha} = Z_{0.99} = 2.33$. Poichè risulta $Z_{oss} > Z_c (3.55 > 2.33)$, si rifiuta l'ipotesi nulla e si può concludere che il nuovo processo produttivo abbia effetto sulla resistenza delle funi.



Ex.2: Verifica Ipotesi sulla media

Esercitazione
15

A. Iodice

Verifica di
ipotesi

Esercizio 1

Esercizio 2

Esercizio 3

Esercizio 4

In un esperimento per verificare eventuali capacità extrasensoriali di un soggetto A si procede nel seguente modo: si consegna un mazzo di 50 carte di colore rosso e blu. La prova per il soggetto A consiste nell'indovinare il colore della carta scelta da un soggetto B che si trova in un'altra stanza. Se il soggetto A indovina 32 carte, è possibile sostenere che si tratta di un fenomeno paranormale, ad un livello di significatività del 5%?

Svolgimento

La probabilità che un soggetto indovini se la carta è blu o rossa è $p = 0.5$. L'ipotesi nulla è che il soggetto A provi semplicemente ad indovinare le scelte di B; l'ipotesi alternativa è che il soggetto A abbia effettivamente delle capacità extrasensoriali. Formalmente,

- $H_0 : p = 0.5$
- $H_1 : p > 0.5$

Il test è unidirezionale dal momento che si è interessati a che il soggetto A abbia prestazioni superiori al semplice 'tirare ad indovinare'. Sotto ipotesi nulla, vale a dire per $p = 0.5$, media e scarto quadratico medio valgono rispettivamente

$$\mu = Np = 50 \times 0.5 = 25 \text{ e } \sigma = \sqrt{Np(1-p)} = \sqrt{50 \times 0.5 \times 0.5} = \sqrt{12.5} = 3.54.$$



Ex.2: Verifica Ipotesi sulla media

Esercitazione
15

A. Iodice

Verifica di
ipotesi

Esercizio 1

Esercizio 2

Esercizio 3

Esercizio 4

Svolgimento

Ad un livello di significatività del 5% bisogna scegliere z_c tale che $P(Z \leq z_c) = 0.95$. Pertanto $z_c = 1.645$. In base ai risultati dell'esperimento, il valore osservato z_o corrisponde

$$z_{oss} = \frac{32 - 25}{3.54} = 1.98$$

poichè risulta essere $z_{oss} > z_c$ ($1.98 > 1.645$), si rifiuta l'ipotesi nulla per la quale il soggetto A ha tirato ad indovinare.



Ex.3: Verifica Ipotesi sulla Varianza

Esercitazione
15

A. Iodice

Verifica di
ipotesi

Esercizio 1

Esercizio 2

Esercizio 3

Esercizio 4

Un macchinario produce batterie al litio che hanno una durata di vita media di 3 anni con uno scarto quadratico medio di 1 anno. Estratto il seguente campione di $n = 5$ batterie caratterizzate da una durata pari a

1.9, 2.4, 3, 3.5, 4.2

si vuole verificare, ad un livello di significatività del 5%, se la varianza dichiarata per le batterie prodotte dal macchinario sia effettivamente pari ad 1.

Svolgimento

Le ipotesi possono essere formalizzate nel seguente modo

- $H_0 : \sigma^2 = 1$
- $H_1 : \sigma^2 \neq 1$

La statistica a cui fare riferimento è la seguente:

$$y = \frac{\hat{S}^2}{\sigma^2} (n - 1) \text{ dove } \hat{S}^2 = \frac{\sum_{i=1}^n x_i - \bar{x}}{n - 1}$$

Tale statistica si distribuisce come una variabile casuale χ^2 con $n - 1$ gradi di libertà.



Ex.3: Verifica Ipotesi sulla Varianza

Esercitazione

15

A. Iodice

Verifica di
ipotesi

Esercizio 1

Esercizio 2

Esercizio 3

Esercizio 4

Svolgimento

Essendo $n - 1 = 4$ e il test bidirezionale, gli estremi della regione di accettazione sono

$$\chi^2_{\frac{1-\alpha}{2},4} = \chi^2_{0.975,4} = 0.48 \text{ e } \chi^2_{\frac{\alpha}{2},4} = \chi^2_{0.025,4} = 11.14$$

Per decidere se rigettare o meno l'ipotesi nulla bisogna verificare se il valore osservato della statistica sia compreso o meno nei limiti della regione di accettazione. In particolare, dai dati campionari risulta essere

$$y_o = \frac{\hat{S}^2}{\sigma_o^2}(n - 1) = \frac{0.9}{1} \times 4 = 3.6$$

Poichè il valore osservato è compreso nei limiti della regione di accettazione, ovvero $0.48 < 3.6 < 11.14$, si accetta l'ipotesi nulla e, di conseguenza, si attesta che la varianza della durata delle batterie prodotte non si discosta significativamente da 1.



Ex.4: Verifica Ipotesi sulla indipendenza tra mutabili

Esercitazione
15

A. Iodice

Verifica di
ipotesi

Esercizio 1

Esercizio 2

Esercizio 3

Esercizio 4

Per testare l'efficacia di un farmaco nella cura di una malattia si considera un campione di 200 pazienti, li si suddivide in due gruppi (A e B). Al gruppo A viene somministrato il farmaco, al gruppo B no; si osserva poi, per ciascun gruppo, il numero di pazienti guariti. I risultati della prova sono riassunti nella seguente tabella

	guariti	non guariti	tot.
gruppo A	75	25	100
gruppo B	65	35	100
tot	140	60	200

Table: Appartenenza ai gruppi vs. guariti (non guariti).

A partire da tale esperimento, si costruisca un test per valutare l'efficacia del farmaco nella cura della malattia.

Svolgimento

Per stabilire se il farmaco sia o meno curativo si può sottoporre la verifica di ipotesi che le due variabili *gruppo di appartenenza* e *guarigione dalla malattia* siano o meno indipendenti: se così dovesse risultare, ovvero che la guarigione dalla malattia non è influenzata dalla assunzione del farmaco, si potrebbe concludere che il farmaco è inefficace.



Ex.4: Verifica Ipotesi sulla indipendenza tra mutabili

Esercitazione
15

A. Iodice

Verifica di
ipotesi

Esercizio 1

Esercizio 2

Esercizio 3

Esercizio 4

Svolgimento

Formalmente

- H_0 : le variabili considerate sono indipendenti.
- H_1 : le variabili considerate non sono indipendenti.

Al fine di calcolare l'indice quadratico di connessione è necessario calcolare le frequenze che ci si attenderebbe se, fissati i marginali di tabella, le variabili fossero indipendenti.

	guariti	non guariti	tot.
gruppo A	70	30	100
gruppo B	70	30	100
tot	140	60	200

Table: Frequenze attese sotto l'ipotesi di indipendenza



Ex.4: Verifica Ipotesi sulla indipendenza tra mutabili

Esercitazione
15

A. Iodice

Verifica di
ipotesi

Esercizio 1

Esercizio 2

Esercizio 3

Esercizio 4

Svolgimento

Si passa a calcolare l'indice quadratico di connessione

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^h \sum_{j=1}^k \frac{(n_{ij} - \hat{n}_{ij})^2}{\hat{n}_{ij}} = \frac{(75 - 70)^2}{70} + \frac{(25 - 30)^2}{30} + \frac{(65 - 70)^2}{70} + \frac{(35 - 30)^2}{30} = 2.38$$

La statistica appena calcolata si distribuisce secondo una v.c. *chi-quadro* χ^2 con $(h - 1) \times (k - 1) = 1$ grado di libertà (h e k sono rispettivamente il numero di modalità delle mutabili considerate). Ad un livello di significatività del 5% e con 1 g.d.l. il valore critico è $\chi_{0.95,1}^2 = 3.84$. Poichè il valore osservato della statistica è minore del valore critico ($2.38 < 3.84$), non si può rifiutare l'ipotesi nulla: di conseguenza non si può sostenere che il farmaco abbia effetti sulla cura della malattia.