Esercitazione 2 del corso di Statistica 2
Prof. Domenico Vistocco

Alfonso Iodice D'Enza

May 15, 2007

1 Esercizio

Si consideri l'esperimento consistente nell'estrazione di una pallina da tre urne. Si consederi inoltre che in ogni urna ci sono 3 palline numerate da 1 a 3. Si definisca la variabile casuale doppia (X, Y) nel seguente modo:

- X: somma dei valori riportati sulle palline estratte da ciascuna urna;
- Y: valore minimo estratto moltiplicato 2

Con riferimento alla variabile casuale doppia si indichino

- lo spazio campione relativo all'esperimento
- possibili valori della v.c. doppia (X, Y)
- valori attesi e varianze delle componenti
- coefficiente di correlazione tra le componenti

1.1 Svolgimento

- *lo spazio campione relativo all'esperimento*

Il numero di possibili sequenze ordinate di palline numerate che è possibile ottenere nella

- *possibili valori della variabile casuale doppia*

(1,1,1)	(1,1,2)	(1,1,3)	(1,2,1)	(1,2,2)	(1,2,3)	(1,3,1)	(1,3,2)	(1,3,3)
(2,1,1)	(2,1,2)	(2,1,3)	(2,2,1)	(2,2,2)	(2,2,3)	(2,3,1)	(2,3,2)	(2,3,3)
(3,1,1)	(3,1,2)	(3,1,3)	(3,2,1)	(3,2,2)	(3,2,3)	(3,3,1)	(3,3,2)	(3,3,3)

Table 1: *Spazio campione della prova di estrazione di palline numerate da tre urne*

(3,2)	(4,2)	(5,2)	(4,2)	(5,2)	(6,2)	(5,2)	(6,2)	(7,2)
(4,2)	(5,2)	(6,2)	(5,2)	(6,4)	(7,4)	(6,2)	(7,4)	(8,4)
(5,2)	(6,2)	(7,2)	(6,2)	(7,4)	(8,4)	(7,2)	(8,4)	(9,6)

Table 2: *Valori assunti dalle componenti della variabile casuale doppia* (X, Y)

XY	$Y = 2$	$Y = 4$	$Y = 6$	Tot.
$X = 3$	1/27	0	0	1/27
$X = 4$	3/27	0	0	3/27
$X = 5$	6/27	0	0	6/27
$X = 6$	6/27	1/27	0	7/27
$X = 7$	3/27	3/27	0	6/27
$X = 8$	0	3/27	0	3/27
$X = 9$	0	0	1/27	1/27
Tot.	19/27	7/27	1/27	1

Table 3: *Probabilità specificate per la variabile casuale doppia (X,Y)*

La distribuzione doppia di probabilità è riportata in tabella 3.

- *calcolare valori attesi e varianze delle componenti* X *ed* Y

Con riferimento alla tabella precedente, il valore atteso della componente X è dato da

$$E_X = \sum_{i=1}^{h} x_i p_{i.} = (3 * \frac{1}{27}) + (4 * \frac{3}{27}) + (5 * \frac{6}{27}) + (6 * \frac{7}{27}) + \\ + (7 * \frac{6}{27}) + (8 * \frac{3}{27}) + (9 * \frac{1}{27}) = 6 \tag{1}$$

Il valore atteso della componente Y invece dato da

$$E_Y = \sum_{j=1}^{k} y_j p_{.j} = (2 * \frac{19}{27}) + (4 * \frac{7}{27}) + (6 * \frac{1}{27}) = 2.67 \tag{2}$$

Il valore atteso del prodotto delle componenti è dato invece da

$$E_{XY} = \sum_{i=1}^{h} \sum_{j=1}^{k} x_i y_j p_{ij} = ((3) * (2) * \frac{1}{27}) + ((4) * (2) * \frac{3}{27}) + \ldots + ((6) * (9) * \frac{1}{27}) = 17.11 \tag{3}$$

- *correlazione tra X ed Y*

Il coefficiente di correlazione tra le componenti X e Y è formalmente definito nel seguente modo

$$Corr_{XY} = \sum_{i=1}^{h}\sum_{j=1}^{k} \frac{x_i - \mu_x}{\sigma_x}\frac{y_j - \mu_y}{\sigma_y} p_{ij} \tag{4}$$

Tuttavia tale coefficiente può essere espresso in termini di valori attesi nel seguente modo:

$$Corr_{XY} = \frac{E_{XY} - E_X E_Y}{\sqrt{[E_{X^2} - (E_X)^2]\,[E_{Y^2} - (E_Y)^2]}} \tag{5}$$

Conoscendo E_X, E_Y ed E_{XY} è di immediato calcolo il valore della covarianza

$$Cov_{XY} = E_{XY} - E_X E_Y = 17.11 - (6 * 2.67) = 1.09 \tag{6}$$

Non resta che calcolare le varianze delle componenti X e Y. Si farà ricorso a $Var_X = E_{X^2} - (E_X)^2$ e $Var_X = E_{Y^2} - (E_Y)^2$.

$$\begin{aligned} E_{X^2} = \sum_{i=1}^{h} x_i^2 p_{i.} &= (9 * \frac{1}{27}) + (16 * \frac{3}{27}) + (25 * \frac{6}{27}) + (36 * \frac{7}{27}) + \\ &+ (49 * \frac{6}{27}) + (64 * \frac{3}{27}) + (81 * \frac{1}{27}) = 38 \end{aligned} \tag{7}$$

Il valore atteso della componente Y invece dato da

$$E_{Y^2} = \sum_{j=1}^{k} y_j^2 p_{.j} = (4 * \frac{19}{27}) + (16 * \frac{7}{27}) + (36 * \frac{1}{27}) = 8.29 \tag{8}$$

Il coefficiente di correlazione è pertanto

$$\begin{aligned} Corr_{XY} &= \frac{E_{XY} - E_X E_Y}{\sqrt{[E_{X^2} - (E_X)^2]\,[E_{Y^2} - (E_Y)^2]}} = \\ &\frac{1.29}{\sqrt{(38 - 36)(8.29 - 7.13)}} = \frac{1.09}{1.52} = 0.72 \end{aligned} \tag{9}$$

2 Esercizio

Si supponga che, in una partita di 25 microchip, ce ne siano 6 difettosi. Si consideri inoltre di aver esaminato 10 microchip dei 25. Qual' è la probabilit'a che dei 10 esaminati, neanche uno sia difettoso?

2.1 Svolgimento

In questo caso la variabile casuale discreta che modellizza la situazione descritta è la v.c. *ipergeometrica* di parametri N, M, k. In particolare sia M il totale dei chip difettosi nell'intera partita; sia N il totale dei chip nella partita e k il numero di chip che l'acquirente interessato ai chip decide di analizzare. Si ha pertanto $M = 6$, $N = 25$ e $k = 6$. La distribuzione della variabile casuale X: *numero di pezzi difettosi su 6 estratti* si avr

$$P(X = x \mid M, N, K) = \frac{\binom{M}{x}\binom{N-M}{k-x}}{\binom{N}{k}} = \frac{\binom{6}{x}\binom{19}{10-x}}{\binom{25}{10}} \tag{10}$$

In particolare, essendo interessati alla probabilità di trovare 0 pezzi difettosi, otteniamo

$$P(X = x \mid M, N, K) = \frac{\binom{6}{x}\binom{19}{10-x}}{\binom{25}{10}} = \frac{\binom{6}{0}\binom{19}{10}}{\binom{25}{10}} = 0.028 \tag{11}$$

3 Esercizio

Si consideri una coppia di dadi equilibrati. Si determini:

- la probabilità di ottenere almeno un '6' in 4 lanci
- la probabilità di ottenere un doppio '6' in 24 lanci

3.1 Svolgimento

- la probabilitá di ottenere almeno un '6' in 4 lanci

La probabilità di ottenere un 6 (successo) in $n = 4$ prove è data da

$$P(X > 0) = 1 - P(X = 0) = 1 - \binom{4}{0}(1/6)^0(5/6)4 = 1 - (5/6)^4 = 0.518 \tag{12}$$

- la probabilità di ottenere un doppio '6' in 24 lanci

L'evento *ottenere un doppio 6 lanciando 2 dadi* ha probabiltà $p = 1/36$. Pertanto la probabilità di ottenere almeno un doppio 6 in 24 lanci è data da

$$P(X > 0) = 1 - P(X = 0) = 1 - \binom{24}{0}(1/36)^0(35/36)^{24} = 1 - (35/36)^{24} = 0.491 \tag{13}$$