Esercitazione 11

A. Iodice

Esercitazione 11

Statistica

Alfonso Iodice D'Enza

iodicede@unina.it

Università degli studi di Cassino

Outline

1. Variabili casuali continue

Outline

Outline

Variabili casuali continue

Una variabile casuale X è continua se, per ogni valore x_0 è nota la probabilità che tale v.c. assuma valori in un intervallo $(x_0, x_0 + dx)$. In particolare

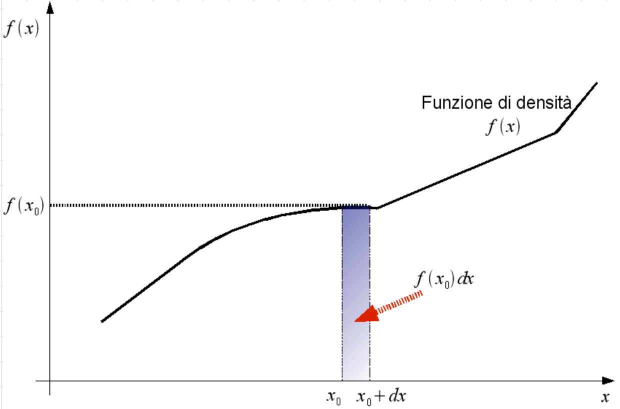
$$P(x_0 < X \leq x_0 + dx) = f(x_0)dx$$

Perchè sia *ben specificata* la v.c. continua deve soddisfare i postulati di Kolmogorov, ovvero deve risultare che

$$f(x) \geq 0, \text{ e che } \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$$

Variabili casuali continue

La probabilità associata ad un intervallo di valori di una v.c. continua X è data dall'area al di sotto della funzione di densità di probabilità, ovvero corrisponde all'integrale della funzione di densità nell'intervallo considerato



Variabili casuali continue

Se la variabile casuale continua, la probabilità che X assuma esattamente il valore x_0 nulla. Risulta infatti

$$P(x_0 < X \leq x_0) \int_{x_0}^{x_0} f(x)dx = 0$$

Per calcolare la probabilità che la v.c. X assuma valori nell'intervallo (x_1, x_2)

$$P(x_1 < X \leq x_2) \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx$$

Funzione di ripartizione per v.c. continue

La funzione di ripartizione $F(x_0)$ di una v.c. continua calcolata nel punto x_0 data da

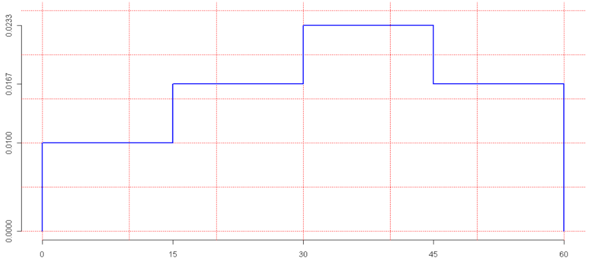
$$F(x_0) = P(X \leq x_0) = \int_{-\infty}^{x_0} f(x)dx$$

Caratteristiche di $F(x)$

La funzione di ripartizione non decrescente e tale che $0 \leq F(x) \leq 1$

Variabili casuali continue generiche

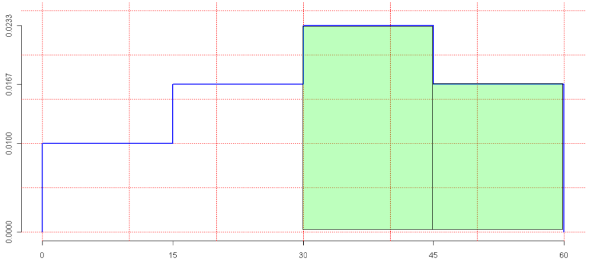
Una partita di football dura 60 minuti ed è suddivisa in 4 quarti da 15 minuti. Le sostituzioni dei giocatori sono illimitati. Si supponga che i minuti in cui un certo giocatore è impiegato seguano la seguente funzione di densità di probabilità



- Qual'è la probabilità che il giocatore giochi terzo quarto in poi?
- Qual'è la probabilità che il giocatore giochi i 20 minuti centrali della partita?
- Qual'è la probabilità che il giocatore giochi i primi 40 minuti della partita?

Variabili casuali continue generiche

- Qual'è la probabilità che il giocatore giochi dal terzo quarto in poi?

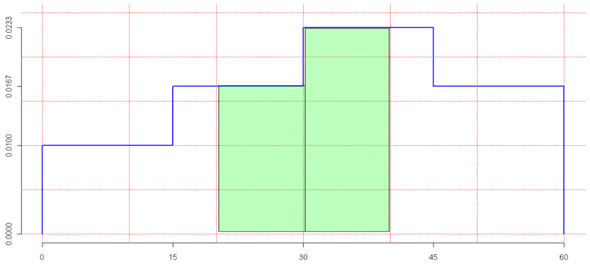


- La probabilità cercata è $P(X \geq 30)$

$$P(X \geq 30) = P(30 \leq X \leq 45) + P(45 \leq X \leq 60)$$
$$= 15 \times (0.02333) + 15 \times (0.0167) = 0.35 + 0.25 = 0.6$$

Variabili casuali continue generiche

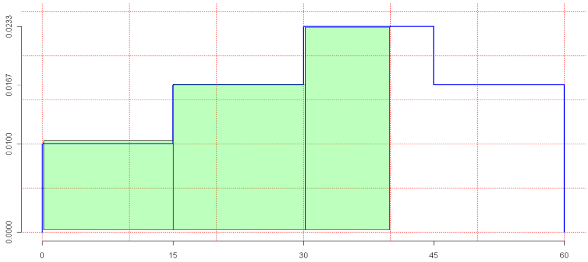
- Qual'è la probabilità che il giocatore giochi i 20 minuti centrali della partita?



- La probabilità cercata è $P(20 \leq X \leq 40)$

$$
\begin{aligned}
{\color{red}P(20 \leq X \leq 40)} &= P(20 \leq X \leq 30) + P(30 \leq X \leq 40) \\
&= 10 \times (0.0167) + 10 \times (0.02333) = 0.0167 + 0.2333 = {\color{red}0.4}
\end{aligned}
$$

- Qual'è la probabilità che il giocatore giochi i primi 40 minuti della partita?

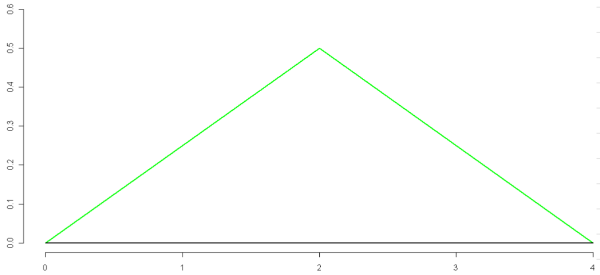


- La probabilità cercata è $P(X \leq 40)$

$$P(X \leq 40) = P(0 \leq X \leq 15) + P(15 \leq X \leq 30) + P(30 \leq X \leq 40)$$
$$= 15 \times (0.01) + 15 \times (0.0167) + 10 \times (0.02333) =$$
$$0.15 + 0.2505 + .23 = 0.6305$$

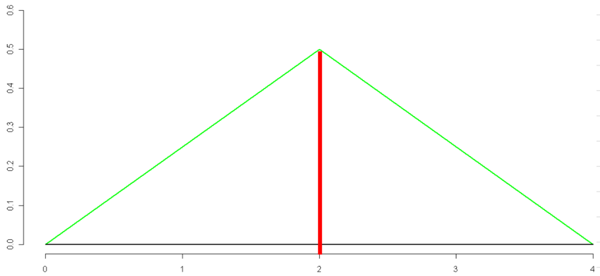
Variabili casuali continue generiche

Alle 2 del pomeriggio uno studente comincia a studiare. Alle 6 del pomeriggio uscirà di casa, ma fino ad allora studierà. Tenendo conto delle varie ed eventuali distrazioni, prevede che l'intensità del suo studio sarà caratterizzato dalla seguente funzione di densità di probabilità:



- Qual'è l'altezza della curva dopo 2 ore di studio?
- Qual'è la probabilità che il tempo di studio superiore a 3 ore?
- Qual'è la probabilità che il tempo di studio sia compreso tra 1 e 3 ore?

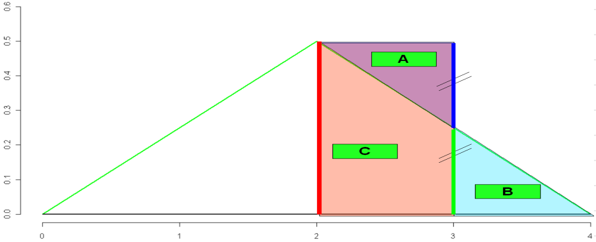
- Qual'è l'altezza della curva dopo 2 ore di studio?



- Per trovare l'altezza in corrispondenza della seconda ora di studio basta tener conto di due cose: la formula per il calcolo dell'area del triangolo $A = \frac{b \times h}{2}$; l'area del triangolo è $A = 1$.

$$A = \frac{b \times h}{2} = 1 = \frac{4 \times h}{2} \text{ da cui } h = \frac{A \times 2}{b} = 2/4 = 0.5$$

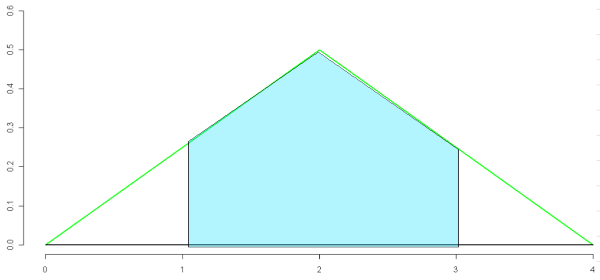
- Qual'è la probabilità che il tempo di studio superiore a 3 ore?



L'area del rettangolo dato da $C + A$ è data dal prodotto tra la base $b = 1$ e l'altezza $h = 0.5$ ottenuta in precedenza. Essendo $Area(C + A) = 0.5 \times 1 = 0.5$, essa coincide con $Area(C + B) = 0.5$ in quanto corrisponde alla metà dell'area del triangolo (densità totale, uguale ad 1 per definizione). Ne consegue che i triangoli rettangoli A e B sono uguali (hanno uguale area, uguale base $(b = 1)$). Inoltre la somma dei due cateti dei triangoli (in blu e verde) deve essere pari a 0.5: ciascuno di essi è dunque pari a 0.25. Quindi $Area(A) = Area(B) = \frac{1 \times 0.25}{2} = 0.125$, da cui $P(X > 3) = 0.125$.

Variabili casuali continue generiche

- Qual'è la probabilità che il tempo di studio sia compreso tra 1 e 3 ore?



- Sulla base dei risultati ottenuti in precedenza, e data la simmetria della funzione di densità considerata , $P(X < 1) = P(X > 3)$. La probabilità cercata è dunque.

$$P(1 < X < 3) = 1 - [P(X < 1) + P(X > 3)] = 1 - [0.125 + 0.125] = 0.75$$

Variabile Casuale Esponenziale (Negativa)

La Variabile Casuale Esponenziale (Negativa) modellizza il tempo di attesa prima del verificarsi di un determinato evento. In particolare sia X il tempo di attesa

$$f(X) = \lambda e^{-\lambda x} \text{ se } x \geq 0; f(X) = 0 \text{ altrimenti.}$$

in cui il parametro della distribuzione λ rappresenta il reciproco del tempo medio del verificarsi dell'evento considerato.

- La funzione di ripartizione è $F(X) = 1 - e^{-\lambda x}$
- $E(X) = \frac{1}{}$
- $Var(X) = \frac{1}{2}$

Proprietà di assenza di memoria

$$P(X > t + s \mid X > t) = P(X > s) \forall s, t \geq 0$$

In sostanza l'andamento esponenziale presuppone che se una lampadina ha funzionato per un certo tempo t, la probabilità che essa funzioni per un ulteriore tempo s non dipende dal tempo precedente di funzionamento.

Variabile Casuale Esponenziale (Negativa)

Il responsabile dell'illuminazione di un palazzo ha a disposizione 3 lampadine di riserva. Ciascuna delle lampadine utilizzate dura in media 200 ore e il responsabile deve aspettare 24 ore perchè gli vengano consegnate nuove lampadine di riserva. In altre parole, se si fulminano più di tre lampadine entro le 24 ore, il responsabile non sarà in grado di sostituirle.

- Qual'è la probabilità che il responsabile non sia in grado di sostituire le eventuali lampadine fulminate.

Svolgimento.
Si consideri di ragionare in termini di centinaia di ore. Il tempo medio è dunque pari a 2 (in centinaia di ore). Il parametro della distribuzione esponenziale è dunque $\lambda = \frac{1}{2} = 0.5$.

Il problema sorge se 3 lampadine si fulminano entro le 24h (ovvero 0.24 in centinaia di ore).

Variabile Casuale Esponenziale (Negativa)

Esercitazione 11

A. Iodice

Variabili casuali continue

Variabili casuali continue generiche

Esercizio 1

Esercizio 2

Variabile Casuale Esponenziale (Negativa)

Esercizio 3

La probabilità che il tempo di rottura di una singola lampadina nelle 24h $P(X \leq 0.24)$ si calcola facendo ricorso alla funzione di ripartizione esponenziale

$$F(0.24) = P(X \leq 0.24) = 1 - e^{-\lambda \times x} = 1 - e^{-0.5 \times 0.24} = 1 - 0.887 = 0.113$$

Poichè la rottura di ciascuna lampadina è indipendente da quella delle altre, la probabilità della simultanea rottura di 3 lampadine è uguale al prodotto delle singole probabilità.

$$P(X_1 \leq 0.24 \cap X_2 \leq 0.24 \cap X_3 \leq 0.24) =$$
$$= P(X_1 \leq 0.24) \times P(X_2 \leq 0.24) \times P(X_3 \leq 0.24) =$$
$$= 0.113 \times 0.113 \times 0.113 = 0.0014$$