# CORSO DI STATISTICA (parte 2) - ESERCITAZIONE 2

*Dott.ssa Antonella Costanzo*

*a.costanzo@unicas.it*

**Esercizio 1. Il modello binomiale**

Da studi interni è noto che il 35% dei clienti del Supermercato GD paga con tessera Bancomat o Carta di credito, gli altri in contanti.

Ad una cassa sono in fila 5 clienti. Qual è la probabilità che:

a. Paghino tutti in contanti?

b. Nessuno paghi in contanti?

c. Due paghino in contanti, gli altri con Carta?

d. I primi due paghino in contanti, gli altri con Carta?

e. Almeno 1 paghi con la Carta?

*Sol.*

Il modello probabilistico adeguato è il tal caso il modello binomiale. Esso consente di descrivere la probabilità di ottenere x successi su n possibili prove indipendenti.

$$X \sim Bin(n, p)$$

dove:

n=numero di prove indipendenti x= numero di successi e p= probabilità di successo

La funzione di probabilità di X:

$$P(X = x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} = \frac{n!}{x!\,(n-x)!} p^x (1-p)^{n-x}$$

Inoltre

$E(X) = np$ e $Var(X) = np(1-p)$

In tal caso l'evento successo è "il cliente paga con carta", i parametri del modello sono:

x=0,1,2…5   n=5

$p = 0.35$

a. probabilità che tutti i clienti paghino in contanti

$$P(X=0)=\binom{5}{0}0.35^0(1-0.35)^{5-0}=\frac{5!}{0!\,(5-0)!}0.35^0 0.65^5=0.116$$

b. probabilità che nessuno paghi in contanti

$$P(X=5)=\binom{5}{5}0.35^5(1-0.35)^{5-5}=\frac{5!}{5!\,(0)!}0.35^5 0.65^0=0.005$$

c. probabilità che due clienti paghino in contanti, gli altri con Carta

$$P(X=3)=\binom{5}{3}0.35^3(1-0.35)^{5-3}=\frac{5!}{3!\,(5-3)!}0.35^3 0.65^2=10\times 0.043\times 0.423=0.182$$

d. probabilità che i primi due clienti paghino in contanti, gli altri con Carta

$$P[Cont\cap Cont\cap Carta\cap Carta\cap Carta]=0.65^2\times 0.35^3=0.423\times 0.043=0.0182$$

e. probabilità che almeno 1 paghi con la Carta

$$P(X\geq 1)=P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)+P(X=4)+P(X=5)$$

$$=1-P(X=0)=1-0.116=0.884$$

Se i clienti in fila alla cassa sono 50, qual è la probabilità che almeno 20 paghino con Bancomat o Carta di Credito?

*Esempio di convergenza della v.c. binomiale alla v.c Normale*

Si dimostra che al crescere del numero delle prove, la v.c. Binomiale tende ad una v.c. Normale con stessa media e stessa varianza (risultato dell'applicazione del Teorema del Limite Centrale), in particolare:

$X\sim Bin(n,p)$ se $n\to\infty$ allora $X\sim N(np,np(1-p))$

I nuovi parametri:

n=50, p=0.35

$\mu=np=50(0.35)=17.5$

$\sigma^2=np(1-p)=50(0.35)(0.65)=11.38$

$$P(X\geq 20)=P\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\geq\frac{\mathbf{19.5}-17.5}{\sqrt{11.38}}\right)=P(Z\geq 0.59)=1-P(Z\leq 0.59)=1-0.7224=0.2776$$

**Nota operativa:** Correzione per la continuità: l'approssimazione normale migliora se si decrementa di 0.5 il valore inferiore e si aumenta di 0.5 quello superiore

**Esercizio 2. Il modello Ipergeometrico**

Un dirigente deve formare un gruppo di lavoro selezionando tre membri in un ufficio da 6 uomini e 4 donne. Scrive i loro nomi su dei foglietti identici, li mette in un'urna e poi estrae una sequenza di 3 bigliettini. Calcolare:

a) la probabilità che estragga 2 donne;

b) il numero di donne atteso nel campione

Sol.

Siccome l'estrazione è in blocco (ciascun bigliettino non viene rimesso nell'urna), viene meno l'ipotesi di indipendenza e quindi il modello probabilistico corretto è in tal caso un modello ipergeometrico. La differenza con il modello binomiale è che, in questo caso, la probabilità condizionata del verificarsi di un successo si modifica in funzione delle precedenti estrazioni.

$X \sim IP(F, N, n)$

n= numero di prove

F=numero casi favorevoli

N=numero di oggetti

x successi su F favorevoli e n-x insuccessi a partire da N-F

La corrispondente distribuzione di probabilità è:

$$P(X = x) = \frac{\binom{F}{x}\binom{N-F}{n-x}}{\binom{N}{n}} = \frac{\frac{F!}{x!\,(F-x)!}\frac{(N-F)!}{(n-x)!\,(N-F-n+x)!}}{\frac{N!}{n!\,(N-n)!}}$$

Nota:

Casi possibili $\binom{N}{n}$, ossia possibili modi di estrarre n elementi favorevoli da un totale di N oggetti

Casi favorevoli $\binom{F}{x}\binom{N-F}{n-x}$, ossia sequenza di n elementi in cui ci sono x successi (da F disponibili) ed n-x insuccessi a partire da N-F non favorevoli

Nel nostro caso:

N=10 (Maschi+Femmine)

F=4 (4 femmine)

x=0,1,2,3,4

n=3 (numero di prove, 3 estrazioni dall'urna)

$$P(X=2)=\frac{\binom{4}{2}\binom{10-4}{3-2}}{\binom{10}{3}}=\frac{\frac{4!}{2!\,(4-2)!}\frac{6!}{1!\,(6-1)!}}{\frac{10!}{3!\,(10-3)!}}=\frac{6\times 6}{120}=0.30$$

Valore atteso delle donne nel campione

$$E(X)=n\frac{F}{N}=3\frac{4}{10}=1.2$$

**Esercizio 3. Il Modello geometrico (caso particolare della v.c. Binomiale Negativa)**

Un'urna contiene 10 palline nere e 5 palline bianche. Viene estratta una pallina alla volta con reinserimento fino a quando esce una pallina nera. Calcolare:
a) la probabilità di estrarre esattamente 4 palline;
b) la probabilità di estrarre almeno 3 palline.

Sol.
In tal caso l'esperimento può essere descritto da una v.c. geometrica poiché essa conta il numero di prove necessarie per ottenere il primo successo (ossia, quanti insuccessi si verificano prima di avere un successo).

$$X{\sim}Geom(p)$$

p= probabilità di successo $\frac{10}{15}$

x=numero di prove 1,2,3,4…

k=numero di successi. In tal caso k=1

La sua distribuzione di probabilità è la seguente:

$$P(X=x)=(1-p)^{x-1}p$$

*Nota:*

$(1-p)^{x-1}$ probabilità di "perdere" sempre sulle prime x-1 prove mentre $p$ è probabilità di vincere all'ultima prova

Valore atteso $E(X) = \frac{1}{p}$

a) probabilità di estrarre esattamente 4 palline

$$P(X=4) = \frac{5}{15}^{3} \times \frac{10}{15} = 0.0242$$

b) probabilità di estrarre almeno 3 palline

$$P(X \geq 3) = 1 - P(X \leq 2) = 1 - [P(X=1) + P(X=2)] = 1 - \left[\frac{10}{15} + \frac{2}{9}\right] = 0.11$$

dove:

$$P(X=1) = \frac{10}{15}$$

$$P(X=2) = \frac{5}{15} \times \frac{10}{15} = \frac{2}{9}$$

**Esercizio 4. Il modello di Poisson**

Supponiamo di voler esaminare il numero di clienti che raggiungono una banca in un'ora. Ipotizziamo che in media ci siano 180 arrivi in un'ora. Ci chiediamo:

a) Qual è la probabilità di due arrivi in un minuto di tempo?

b) Qual è la probabilità di più di due arrivi in un minuto di tempo?

*Sol.*

Il modello probabilistico appropriato è in tal caso il modello di Poisson, infatti ciascun arrivo è un evento discreto che si verifica in un particolare istante di tempo, nell'intervallo continuo di un'ora, ed è un evento indipendente perché l'arrivo di un cliente in un intervallo non dipende dall'arrivo di qualsiasi altro cliente in qualsiasi altro intervallo.

$$X \sim Poi(\lambda)$$

Distribuzione di probabilità:

$$P(X=x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!}$$

Condizioni:

1. Eventi che si verificano su intervalli disgiunti sono indipendenti

2. La probabilità che si verifichi un evento in un intervallo piccolo proporzionale alla lunghezza dell'intervallo;

3. La probabilità che si verifichi più di un evento in un intervallo piccolo è trascurabile

Inoltre nel modello di Poisson
$E(X) = Var(X) = \lambda$

Indichiamo con:
t = l'intervallo di tempo considerato nel problema, cioè un minuto;
X = il numero di successi per intervallo di tempo t;
λ = il numero atteso di successi nell'intervallo di tempo usato come unità di misura, che nel nostro caso è l'ora.

Allora, tenendo presente che l'unità di misura a cui λ si riferisce è l'ora, si ha:

$$t = \frac{1}{60} \qquad \lambda = \frac{180}{60} = 3$$

$X \sim Poi(\lambda = 3)$

a) $P(X = 2) = \frac{e^{-3}3^2}{2!} = 0.2240$

b) $P(X > 2) = 1 - P(X \leq 2) = 1 - [P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)]$

dove:
$$P(X = 0) = \frac{e^{-3}3^0}{0!} = 0.0497$$

$$P(X = 1) = \frac{e^{-3}3^1}{1!} = 0.1494$$

$P(X > 2) = 1 - [0.0497 + 0.1494 + 0.2240] = 0.577$