STATISTICA (2) – ESERCITAZIONE 6

05.03.2014

Dott.ssa Antonella Costanzo

Esercizio 1. Verifica di ipotesi sulla media (varianza nota), p-value del test

Il preside della scuola elementare XYZ sospetta che i suoi studenti abbiano un IQ, quoziente di intelligenza, superiore alla media italiana. Dopo aver selezionato casualmente 64 bambini tra i suoi studenti e misurato il loro quoziente di intelligenza, il preside riscontra un valore medio di 106. Supponiamo che l'IQ di uno studente della scuola elementare XYZ sia una variabile aleatoria normale con valore atteso μ, e varianza $\sigma^2 = 256$. Si supponga, inoltre, che il valore medio nazionale sia 100. Si assuma che il preside decida di verificare se i suoi studenti siano più intelligenti della media fissando un livello di significatività $\alpha = 5\%$. Può il preside concludere che i suoi studenti siano più intelligenti della media?

Soluzione

1. Definizione del sistema di ipotesi:

$H_0: \mu = 100$

$H_1: \mu > 100$

2. Livello di significatività

$\alpha = 0.05$

3. Costruzione della statistica test

Siccome la varianza della popolazione è nota, allora:

$$Z_{stat} = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim N(0,1)$$

4. Definizione della regola di decisione (regione di rifiuto)

Il livello di significatività è $\alpha = 0.05$, il test è unidirezionale, quindi il quantile della distribuzione Normale standard da individuare è: $+z_{(1-\alpha)}$ ossia:

$+z_{0.95} = +1.645$

R.C. (Regione di Rifiuto)

Se $Z_{stat} \geq +1.645$ allora rifiutiamo l'ipotesi nulla o *equivalentemente*

$$R.C.\left\{\bar{x} > \mu_0 + z_{0.95} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right\} = \left\{\bar{x} > 100 + 1.645 \cdot \frac{16}{\sqrt{64}} \rightarrow \bar{x} > 103.29\right\}$$

5. A partire dal campione calcolo il valore della statistica sotto l'ipotesi nulla

$$Z_{stat} = \frac{106 - 100}{\frac{16}{\sqrt{64}}} = 3$$

6. Decisione

Poichè $Z_{stat} = 3 > 1.645$ rifiutiamo l'ipotesi nulla. C'è evidenza sufficiente per affermare che gli studenti della scuola elementare XYZ sono mediamente più intelligenti.

6.bis Decisione in base al ***p-value*** del test

Definizione

Il *p-value* o livello di significatività osservato è la probabilità di osservare valori della statistica test meno favorevoli ad H_0del valore effettivamente ottenuto. Di conseguenza un *p-value* molto piccolo è un forte indicatore del fatto che H_0 non è vera.

Se *il p-value*<α, rifiuto quindi l'ipotesi nulla.

Nel nostro caso, essendo il test unidirezionale:

$$P(\bar{x} = 106|\mu_0 = 100) = (P\left(Z_{stat} > Z_{stat|H_o}\right)$$

$$P(Z_{stat} > 3) = (1 - 0.9987) = 0.0013$$

Siccome il *p-value* < α=0.05, allora rifiutiamo l'ipotesi nulla.

Esercizio 2. Verifica di ipotesi sulla media (varianza ignota, n<30)

In un campione di 15 bambini della città di New York il tempo medio passato a guardare la televisione di 28.50 ore a settimana, con varianza campionaria di 16 ore. L'organizzazione per la Salute per i Bambini Americani raccomanda un massimo di 25 ore per settimana. Il sindaco di New York assicura che i suoi bambini non superano questo limite. Usando un livello di significatività del 2.5%, si può concludere che il sindaco abbia ragione? Si assuma che il tempo speso a guardare la TV dai bambini sia distribuito secondo una normale. Cambierebbe il risultato del test fissando un livello di significatività $\alpha = 0.10$? Motivare la risposta.

Soluzione

1. Definizione del sistema di ipotesi:

$H_0: \mu \leq 25$

$H_1: \mu > 25$

2. Livello di significatività

$\alpha = 0.025$

3. Costruzione della statistica test

Siccome X si distribuisce secondo una normale e la varianza della popolazione è ignota, allora:

$$T_{stat} = \frac{\bar{\bar{X}} - \mu_0}{\frac{S}{\sqrt{n}}} \sim t_{n-1}^{\alpha}$$

4. Definizione della regola di decisione (regione di rifiuto)

Il livello di significatività è $\alpha = 0.025$, il test è a una coda, quindi il quantile della distribuzione t di student da individuare è:

$t_{14,0.025} = 2.145$

Se $T_{stat} \geq 2.145$ rifiutiamo l'ipotesi nulla o *equivalentemente*

$$R.C.\left\{\bar{x} > \mu_0 + t_{14,0.025} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}\right\} = \left\{\bar{x} > 25 + 2.145 \cdot \frac{4}{\sqrt{15}} \rightarrow \bar{x} > 27.22\right\}$$

5. A partire dal campione calcolo il valore della statistica sotto l'ipotesi nulla

$$T_{stat} = \frac{28.50 - 25}{\frac{4}{\sqrt{15}}} = 3.39$$

6. Decisione

$T_{stat} = 3.39 > 2.145$ per cui, data l'evidenza campionaria, si può rifiutare l'ipotesi nulla che il tempo medio passato dai bambini newyorkesi a guardare la TV sia inferiore a 25 ore settimanali, con un livello di significatività del 2.5%. Il sindaco andrà smentito.

Per un livello di significatività fissato $\boldsymbol{\alpha = 0.1}$

Definizione della (*nuova*) regola di decisione (regione di rifiuto)

Per $\alpha = 0.1$, per cui il quantile della distribuzione t di student da individuare è:

$t_{14,0.1} = 1.345$

Se $T_{stat} \geq 1.345$ rifiutiamo l'ipotesi nulla o *equivalentemente*

$$R.C.\left\{\bar{x} > \mu_0 + t_{14,0.1} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}\right\} = \left\{\bar{x} > 25 + 1.345 \cdot \frac{4}{\sqrt{15}} \rightarrow \bar{x} > 26.39\right\}$$

(nuova) decisione:

Poichè $T_{stat} = 3.39 > 1.345$ rifiutiamo ancora l'ipotesi nulla. Così facendo aumenta la probabilità di rifiutare l'ipotesi nulla quando è vera (errore di I tipo).

Esercizio 3 *(Cicchitelli).* **Errore di I e II tipo, potenza del test**

Per la generica voce di un inventario di un'impresa mercantile sia X la variabile casuale *valore inventariato - valore certificato*. Un certificatore contabile estrae a sorte un campione di 120 voci ottenendo $\bar{x} = 25.3$, $S^2 = 13240$. Sia μ la media di X nella popolazione.

a) Si sottoponga a verifica l'ipotesi che $\mu = 0$ contro l'alternativa $\mu > 0$, cioè che l'inventario è gonfiato, con $\alpha = 0.01$;
b) Si calcoli la probabilità dell'errore di I tipo;
c) Si calcoli la probabilità di errore di secondo tipo nel caso di ipotesi alternativa $H_a: \mu = 27$
d) Si calcoli la potenza del test.
e) Senza fare i calcoli, e considerando i risultati del punto d) spiegare come cambierebbe la potenza del test se l'ipotesi alternativa è $H_a: \mu = 28$.

Soluzione

a)

1. Definizione del sistema di ipotesi:

$H_0: \mu = 0$

$H_1: \mu > 0$

2. Livello di significatività

$\alpha = 0.01$

3. Costruzione della statistica test

Trattandosi di un campione di dimensione elevata, per il TLC si può ricorrere all'approssimazione normale e considerare S^2 una buona stima della varianza della popolazione.

$$Z_{stat} = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{S}{\sqrt{n}}} \sim N(0,1)$$

4. Definizione della regola di decisione (regione di rifiuto)

Il livello di significatività è $\alpha = 0.01$, il test è a una coda, quindi

$z_{0.99} = 2.326$

Se $Z_{stat} \geq 2.326$ rifiutiamo l'ipotesi nulla o *equivalentemente*

$$R.C.\left\{\overline{x} > \mu_0 + z_{0.99} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}\right\} = \left\{\overline{x} > 0 + 2.326 \cdot \frac{115.0652}{\sqrt{120}} \rightarrow \overline{x} > 24.43\right\} \qquad [\mathbf{1}]$$

5. A partire dal campione calcolo il valore della statistica sotto l'ipotesi nulla

$$Z_{stat} = \frac{25.3 - 0}{\frac{115.0652}{\sqrt{120}}} = 2.41$$

6. Decisione

Siccome $Z_{stat} = 2.41 > z_{0.99} = 2.326$ rifiuto l'ipotesi nulla.

b) la probabilità dell'errore di I tipo è α=0.01

c) Si definisce ***errore di II tipo*** la probabilità di non rifiutare l'ipotesi nulla quando è vera l'ipotesi alternativa, ossia nel nostro caso:

$$\beta = P(Z_{stat} \leq z_{0.99} | H_1)$$

A partire dall'ipotese alternativa proposta $\mu_a = 27$ (che da quindi luogo ad una distribuzione alternativa), la probabilità dell'errore di II tipo è data da:

$$\beta = P(\bar{x} \leq 24.43 | \mu_A = 27) = P\left(Z_{stat} \leq \frac{\bar{x} - \mu_A}{\frac{s}{\sqrt{n}}}\right)$$

$$\beta = P\left(Z_{stat} \leq \frac{24.43 - 27}{10.5}\right) = P(Z_{stat} \leq -0.24) = 0.403$$

d) La potenza del test è la probabilità di rifiutare correttamente H_0, in pratica la probabilità di prendere la "decisione giusta" e può essere espressa, in termini standardizzati, come:

$$1 - P(Z_{stat} < z_{0.99}|H_a) = 1 - \beta$$

dove β è la probabilità di non rifiutare H_0 anche se è vera H_1.

Potenza del test

$$1 - \beta = 1 - 0.403 = 0.597$$

Nota: un test ha potenza maggiore se la dimensione campionaria è grande, se la discrepanza vera dall'ipotesi nulla è grande e se la variabilità nella popolazione è bassa.

e) Specificando $H_a = 28$ la probabilità dell'errore di II tipo si riduce e aumenta la potenza del test

Esercizio 4. Verifica d'ipotesi sul confronto tra varianze

Due appezzamenti di uno stesso frutteto sono stati trattati con due diversi fertilizzanti. In ciascun appezzamento è stato scelto a caso un campione di piante controllandone il peso della produzione.

Campione 1 = 25.3, 32.6, 18.7, 29.4
valori campionari: $\bar{x}_1 = 26.5 \quad S_1^2 = 36$

Campione 2 = 31.5, 23.4, 29.2, 34.6, 27.5

valori campionari: $\bar{x}_1 = 29.2 \quad S_1^2 = 17.7$

Supponendo che nelle due popolazioni il peso della produzione segue una distribuzione normale:

a) Testare l'uguaglianza delle due varianze con un livello di significatività dell'1%;

Soluzione

a) Sistema d'ipotesi:

$H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$
$H_1: \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$

2. Livello di significatività
$\alpha = 0.01$

3. Costruzione della statistica test

$$F^{stat} = \frac{S_1^2}{S_2^2} \sim F_{(n_1-1)(n_2-1),0.01}$$

4. Regola di decisione

Il risultato della statistica bisogna confrontarlo con il valore soglia dalla tavola della F in corrispondenza della colonna con 3 *gdl* e la riga con 4 *gdl*.
$f^{sup}_{(3,4),0.01} = 16.69$ corrisponde al *valore soglia superiore*.

Per ricavare il valore soglia inferiore è sufficiente considerare il valore critico superiore, di una distribuzione F con i gradi di libertà invertiti, cioè con (n_2-1) e (n_1-1).
Il *valore soglia inferiore* si ottiene calcolando il reciproco di $f^{sup}_{(3,4),0.01}$ ossia:

$$f^{inf} = \frac{1}{f^{sup}_{(3,4),0.01}} = \frac{1}{16.69} = 0.06$$

R.C.

Rifiuto l'ipotesi nulla se: $\{F^{stat} \leq f^{inf} \cup F^{stat} \geq f^{sup}\}$

5. Valore della statistica test

$$F^{stat} = \frac{36}{17.7} = 2.03$$

6. Decisione: Accetto l'ipotesi di omoschedasticità.