Esercitazione 3 del corso di Statistica (parte 2)

Dott.ssa Paola Costantini

29 Aprile 2009

Esercizio n 1

Il reddito dei dipendenti di 2 aziende è descritto da 2 variabili casuali Normali caratterizzate dai seguenti parametri:

$$X_1 \sim N\ (20,\ 16)$$
$$X_2 \sim N\ (25,\ 9)$$

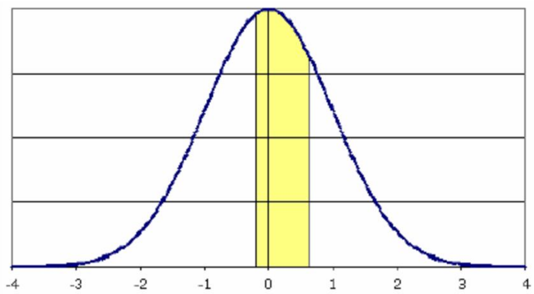
dov 0,409 ri rappresentano migliaia di euro.
Sapendo che le 2 aziende contano, rispettivamente, 10 e 25 dipendenti:

a) si calcoli la probabilità che il reddito dell'intero insieme dei 35 individui sia compreso tra 23.000 e 25.000 euro;
b) si rappresentino graficamente le 2 distribuzioni con la distribuzione globale.

$$P\ (23 \le X \le 25) = P\left(\frac{23 - 23,55}{\sqrt{5,88}} \le Z \le \frac{25 - 23,55}{\sqrt{5,88}}\right) = P\ (-0,23 \le Z \le 0,6) =$$

$$P\ (Z \le 0,6) - P\ (Z \le -0,23) = P\ (Z \le 0,6) - [1 - P\ (Z \le 0,23)] = 0,7257 - (1 - 0,5910)$$

$$= 0,409$$



Esercizio n 2

Il risultato di un test attitudinale ha una media pari a 220 con uno scarto quadratico medio di 20.
Effettuando il test su un campione di 100 soggetti determinare:

a) la probabilità che il punteggio medio sia maggiore di 225;
b) la probabilità che il punteggio medio sia compreso tra 216 e 223;
c) il punteggio medio minimo registrato nel 30% più abile del campione.

Soluzione

Poiché la numerosità campionaria è elevata, si può sfruttare il teorema del limite centrale, ossia trattare il punteggio medio $\overline{x}$ come una v.c. normale con parametri $\mu_{\overline{x}} = \mu_X$ e $\sigma^2_{\overline{x}} = \dfrac{\sigma^2_X}{n}$

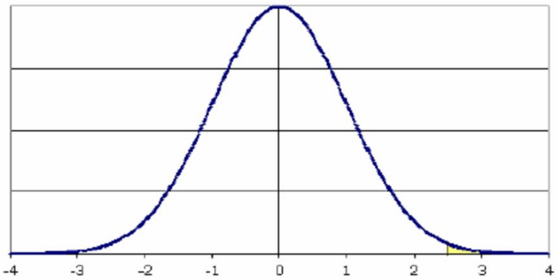
$$\overline{x} \sim N\left(\mu_X; \frac{\sigma^2_X}{n}\right)$$

ossia:

$$\overline{x} \sim N(220; 4)$$

a) P (X > 225)

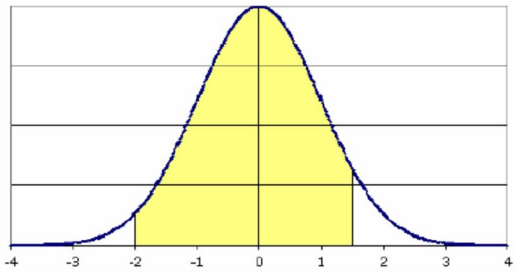
$$z_{225} = \frac{225 - 220}{2} = 2,5$$



P (X > 225) = P (Z > 2,5) = 1 – F(2,5) = 1 – 0,9938 = **0,0062**

b) P (216 ≤ X ≤ 223)

$$z_{216} = \frac{216-220}{2} = -2\,; \quad z_{223} = \frac{223-220}{2} = 1{,}5$$



P (216 ≤ X ≤ 223) = P (-2 ≤ Z ≤ 1,5) = F(1,5) - [1 - F(2)] = 0,9332 - (1 - 0,9772) = **0,9104**

Esercizio n 3

Il tempo di percorrenza del treno che collega la stazione di Roma Termini con l'aeroport di Fiumicino è di 30 minuti esatti. Il percorso è lungo 30 km. e la velocità di percorrenza costante durante tutta la tratta.
a) Si è interessati a valutare la probabilità che il treno interrompa la corsa tra il 15-mo kn ed il 19-mo km. per un guasto improvviso. Quanto vale tale probabilità?
b) Calcolare il valore atteso e la varianza della distribuzione di riferimento.

a) Poiché la velocità di percorrenza del treno è costante è lecito attendersi che la probabilità che il treno interrompa improvvisamente la corsa per un guasto improvviso è costante durante tutta la tratta di percorrenza, e quindi pari ad 1/30. La variabile casuale di riferimento X "il treno arresta la sua corsa all'i-mo km. per un guasto improvviso" è quindi la uniforme continua.

a=0, b=30: $X \sim U(0, 30)$

$$F(19) = \int_0^{19} f(x)dx = \frac{19-0}{30-0} = 0{,}633 \qquad F(15) = \int_0^{15} f(x)dx = \frac{15-0}{30-0} = 0{,}5$$

P(15 ≤ X ≤ 19) = F(19) – F(15) = 0,633 – 05 = 0,133

b) Calcolare il valore atteso e la varianza della distribuzione di riferimento.

$$E(X) = \frac{a+b}{2} = \frac{30}{2} = 15 \qquad Var(X) = \frac{(b-a)^2}{12} = \frac{30^2}{12} = \frac{900}{12} = 75$$

Esercizio n 4

In un poligono di tiro la probabilità che ad una certa distanza un determinato individuo colpisca il bersaglio esattamente al centro è 0,25. Calcolare la probabilità che lo stesso individuo centri almeno 2 volte il bersaglio in 7 tentativi.

Svolgimento
n=7
p=0,25
1-p=0,75

$$X\sim Bin(7,0,25)$$

La funzione di probabilità è data da:

$$P(X=x)=\binom{n}{x}p_x(1-p)^{n-x}=\frac{n!}{x!(n-x)!}p^x(1-p)^{n-x}$$

$$P(x\geq 2)=1-P(x<2=1-(P(x=0)\cup(P(x=0))$$

$$P(x=0)\cup P(x=1)=\frac{7!}{0!7!}0,25^0\cdot 0,75^7+\frac{7!}{1!6!}0,25^1 0,75^6=$$
$$=(1\cdot 1\cdot 0,1335)+(7\cdot 0,25\cdot 0,1780)=0,1335-0,3115=0,4450$$

$$P(X\geq 2=1-0,4450=0,5550$$

Esercizio n 5

La probabilità che una persona ospite di un famoso centro benessere di Ischia sia soddisfatta del trattamento ricevuto è pari a 0,9. Si intervistano a caso 500 persone e si chiede loro cosa ne pensano del trattamento ricevuto. Determinare la probabilità che ci siano almeno 440 soggetti dichiaratisi soddisfatti.

Soluzione

Grazie al Teorema di De Moivre - Laplace è possibile approssimare la Binomiale alla variabile casuale Normale e di conseguenza alla v.c. Normale Standardizzata.

Poiché la variabile casuale Binomiale ha valore atteso pari a

$$E(X)=n\cdot p=500\cdot 0,9=450$$

e varianza

$$Var(X) = n \cdot p \cdot (1 - p) = 45$$

Possiamo procedere all'operazione di standardizzazione.

Quindi P(X > 440 + 0,5):

$$Z = \left(\frac{440{,}5 - 450}{\sqrt{45}} \right) = -1{,}416$$

(Si aggiunge 0,5 poiché i valori della binomiale sono discreti, mentre quelli della normale sono continui).