Esercitazione 2 del corso di Statistica 2

Dott.ssa Paola Costantini

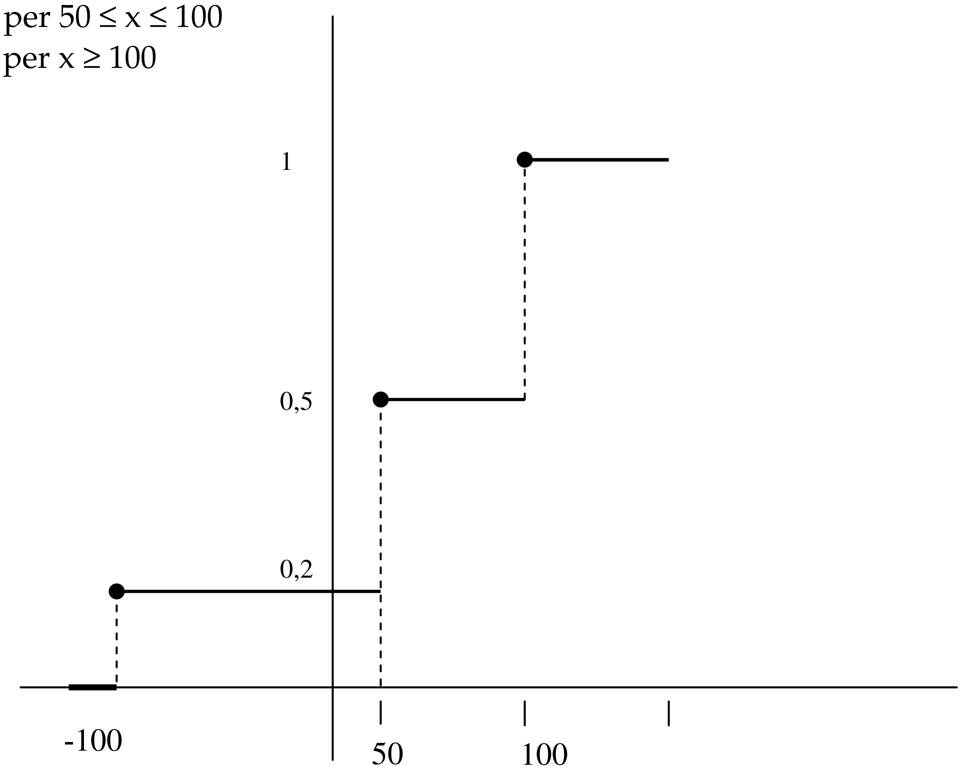
28 Gennaio 2009

Esercizio 1

Un negoziante di abbigliamento ha acquistato un capo per 100 euro. Egli può rivenderlo a 200 euro prima dei saldi oppure in saldi a 150 euro, infine il capo può rimanere invenduto in magazzino. La probabilità che lo rivenda prima dei saldi è 0,50 e la probabilità che lo rivenda in saldi è 0,30. Sia X la variabile casuale che descrive il profitto del negoziante su questo capo. Se la vendita avviene prima dei saldi si ha X = 100, se la vendita avviene nel periodo dei saldi, si ha X = 50, infine se il capo resta invenduto si ha X = -100.
La funzione di probabilità di X è riportata in tabella 1.

PROFITTO	-100	50	100
Probabilita’	0,20	0,30	0,50

F(x)=0 per x < -100
F(x)=0,2 per -100 ≤ x ≤ 50
F(x)=0,5 (0,2 +0,3) per 50 ≤ x ≤ 100
F(x)=1 per x ≥ 100

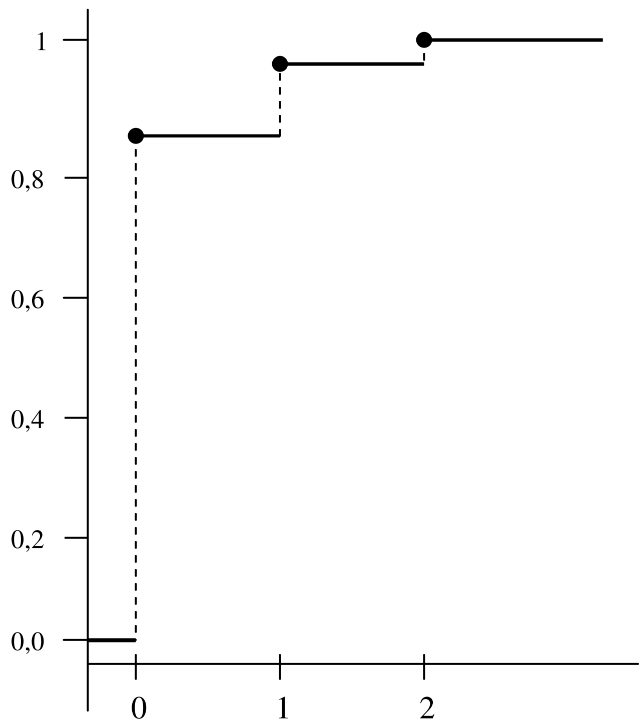


Esercizio 2

Una fabbrica produce quadri per appendere quadri e li vende in confezioni da 20. Il proprietario della fabbrica ha stimato che la probabilità che in una scatola non vi siano ganci difettosi è 0,85, la probabilità che vi sia un gancio difettoso è 0,12, e la probabilità che vi siano due ganci difettosi è 0,03.
Sia X la variabile casuale che descrive il numero di ganci difettosi, la distribuzione di X è riportata in tabella 2.

GANCI DIFETTOSI	0	1	2
Probabilita'	0,85	0,12	0,03

F(x)=0, per $x < 0$
F(x)=0,85 per $0 \leq x \leq 1$
F(x)=0,97 per $1 \leq x \leq 2$
F(x)=1 per $x \geq 2$



b. Nel caso di variabili casuali discrete il valore atteso è dato da

$$\mu = E[X] = \sum_i x_i p_i$$

Nel nostro caso abbiamo:

$$\mu = E[X] = \sum_{x=0}^{2} xP(X = x) = 0 \times 0{,}85 + 1 \times 0{,}12 + 2 \times 0{,}03 = 0{,}18$$

Tale risultato può essere interpretato nel modo seguente: se si considera un elevato numero di scatole il numero medio di ganci difettosi per scatola è 0,18.

Per le variabili casuali discrete la varianza è data da:

$$\sigma^2 = \sum_i (xi - \mu)^2 p_i$$

Nel nostro caso la varianza è data da:

$$\sigma^2 = \sum_{x=0}^{2} (x - \mu)^2 P(X = x) = (0 - 0{,}18)^2 \times 0{,}85 + (1 - 0{,}18)^2 \times 0{,}12 + (2 - 0{,}18)^2 \times 0{,}03 = 0{,}21$$

La varianza può anche essere calcolata come differenza tra il valore atteso del quadrato di X e il quadrato della media.

$$\sigma^2 = Var(X) = E[X^2] - \mu^2$$
$$E[X^2] = 0 \times 0{,}85 + 1 \times 0{,}12 + 4 \times 0{,}03 = 0{,}24$$
$$\mu^2 = 0{,}18^2 = 0{,}03$$
$$\sigma^2 = 0{,}24 - 0{,}03 = 0{,}21$$
$$\sigma = \sqrt{\sigma_2} = 0{,}458$$

Esercizio n 3

Il reddito di un promotore finanziario è in parte fisso e in parte variabile. Egli percepisce una quota fissa giornaliera di 50 euro più una somma pari a 10 euro per ogni contratto concluso. Sia X la variabile che descrive il numero di contratti conclusi quotidianamente. La funzione di probabilità è riportata in tabella 3.

CONTRATTI	0	1	2	3	4
Probabilita'	0,15	0,25	0,35	0,20	0,05

a) Calcolare il reddito atteso del promotore finanziario. Si osservi che il reddito Y è dato da Y = =10X + 50, pertanto il valore atteso risulta:

$$E[Y] = 10 \times E[X] + 50$$

La media dei contratti conclusi quotidianamente è

$$E[X] = 0 \times 0{,}15 + 1 \times 0{,}25 + 2 \times 0{,}35 + 3 \times 0{,}20 + 4 \times 0{,}05 = 1{,}75$$

Di conseguenza il reddito atteso è $E[Y] = 10 \times 1{,}75 + 50 = 67{,}50$

b) Calcolare al varianza del reddito del promotore finanziario.
Sappiamo che il reddito è descritto dalla trasformazione lineare Y = 10X + 50 della variabile casuale che descrive il numero di contratti conclusi quotidianamente. La media di X è pari a $\mu_x = 1{,}75$ e la sua varianza è $\sigma_x^2 = E[X^2] - \mu_x^2 = 4{,}25 - 1{,}75^2 = 1{,}19$

Dove 4,25 = $0^2 \times 0{,}15 + 1^2 \times 0{,}25 + 2^2 \times 0{,}35 + 3^2 \times 0{,}2 + 4^2 \times 0{,}05$

$\sigma_Y^2 = Var(Y)n = Var(aX + b) = a^2 \sigma_x^2$

Di conseguenza la varianza di Y risulta $\sigma_Y = 10^2 \times 1{,}19 = 119$

Esercizio n. 4

Da un'indagine statistica emerge che gli italiani hanno in media il livello di colesterolo a 225 unità, con una deviazione standard pari a 75 unità.

a. Calcolare la probabilità che il livello di colesterolo sia compreso tra 150 e 300 unità.

$$P(|X - \mu| \leq k\sigma) \geq 1 - \frac{1}{k^2}$$

$$k = \frac{|X-\mu|}{\sigma} = \frac{|300-225|}{8{,}66} = \frac{|150-225|}{8{,}66} = \frac{75}{8{,}66} = 8{,}66$$

$$P(|X - 225| < 75) = P(150 \leq X \leq 300) \geq 1 - \frac{1}{8{,}66^2} = 0{,}987$$

b. Calcolare la probabilità che il livello di colesterolo sia compreso tra 200 e 250 unità.

$$P(|X - \mu| \leq k\sigma) \geq 1 - \frac{1}{k^2}$$

$k = \frac{|X-\mu|}{\sigma} = \frac{|200-225|}{8{,}66} = \frac{25}{8{,}66} = 2{,}9$ per k > 0 la disuguaglianza è valida.

$$P(|X - 225| < 25) = P(200 \leq X \leq 250) \geq 1 - \frac{1}{2{,}9^2} = 0{,}88$$

c. Calcolare la probabilità che il livello di colesterolo sia compreso tra 215 e 235 unità.

$$P(|X - \mu| \leq k\sigma) \geq 1 - \frac{1}{k^2}$$

$k = \frac{|X-\mu|}{\sigma} = \frac{|235-225|}{8{,}66} = \frac{10}{8{,}66} = 1{,}15$ per k > 0 la disuguaglianza è valida.

$$P(|X - 225| < 10) = P(215 \leq X \leq 235) \geq 1 - \frac{1}{1{,}15^2} = 0{,}2438$$

c. Calcolare la probabilità che il livello di colesterolo sia compreso tra 220 e 230 unità.

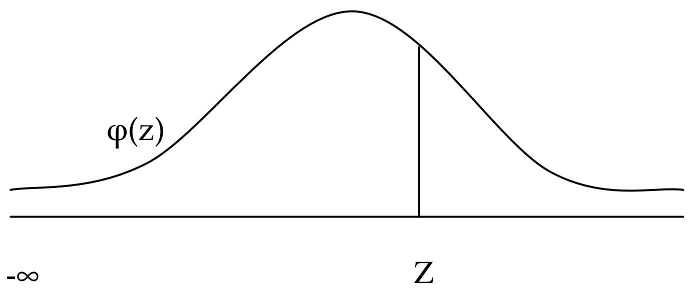
$$P(|X-\mu| \le k\sigma) \ge 1-\frac{1}{k^2}$$

$k = \frac{|X-\mu|}{\sigma} = \frac{|220-225|}{8,66} = \frac{5}{8,66} = 0,57$ per k < 0 la disuguaglianza è banale in termini di contenuto informativo

$$P(|X-225| < 5) = P(220 \le X \le 230) \ge 1-\frac{1}{0,57^2} = -2$$

ESERCIZI SULLA V.C. NORMALE

φ(z) = P(Z≤z) con Z~N(0,1)

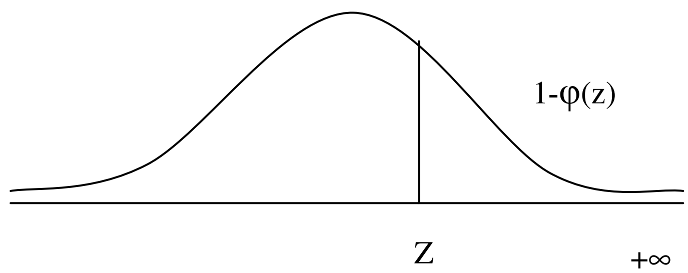


Calcolare:

P(Z ≤ 0,99) = φ(0,99) = 0,8389

P(Z ≤ 1,36) = φ(1,36) = 0,9131

φ(z) = P(Z≤z) con Z~N(0,1)

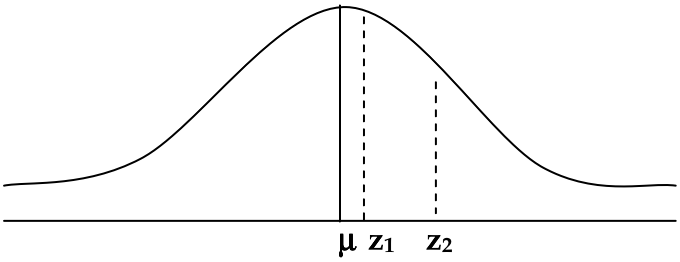


Calcolare:

$P(Z \leq 0{,}99) = \varphi(0{,}99) = 0{,}8389$

$P(Z \leq 1{,}36) = \varphi(1{,}36) = 0{,}9131$

IN UN QUALSIASI INTERVALLO



Calcolare

$P(0{,}5 < Z < 1)$ $\quad \varphi\,(1) = 0{,}8413$

$\varphi\,(0{,}5) = 0{,}6914$

$\varphi\,(1) - \varphi\,(0{,}5)$

$P(0{,}6914 < Z < 0{,}8413) = P(0{,}8413 - 0{,}6914) = 0{,}1499 \cong$ **15%**

Calcolare:

$P(0{,}63 < Z < 1{,}77)$ $\quad \varphi\,(1{,}77) = 0{,}9616$

$\varphi\,(0{,}63) = 0{,}7357$

$\varphi\,(1{,}77) - \varphi\,(0{,}63)$

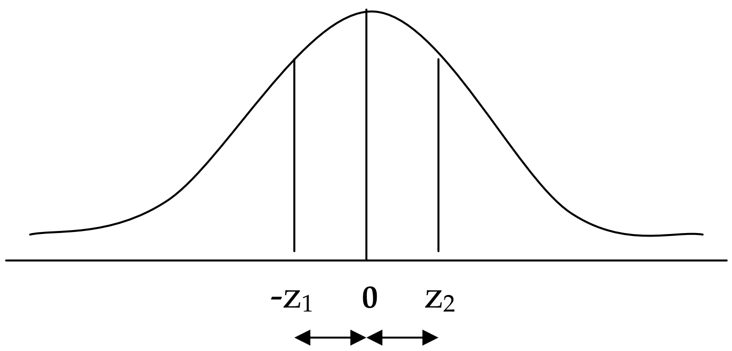
$P(0{,}7357 < Z < 0{,}9616) = P(0{,}9616 - 0{,}7357 = 0{,}2259 \cong$ **22%**

L'INTERVALLO E' A CAVALLO DI μ

$Z \sim N(0,1)$ calcolare $(z_1<Z<z_2)$

$P(z_1<Z< z_2) = P(z_1<Z<0)+P(0<Z< z_2)$

= $\varphi(-z_1) - \varphi(0) + \varphi(z_2) - \varphi(0)$
= $\varphi(-z_1) + \varphi(z_2) - 1$



Calcolare:

$P(-1{,}1 <Z<0{,}35)$ $\varphi(1{,}1) = 0{,}8643$
$\varphi(0{,}35) = 0{,}6368$
$\varphi(0) = 0{,}5$

= $\varphi(0{,}35) - \varphi(0) + \varphi(1{,}1) - \varphi(0)$

$P(-1{,}1 <Z<0{,}35)$ = 0,6368+0,8643-1 = **0,5**

Calcolare:

$P(-1{,}74 <Z<0{,}11)$ $\varphi(0{,}11) = 0{,}5438$
$\varphi(1{,}74) = 0{,}9590$
$\varphi(0) = 0{,}5$

= $\varphi(0{,}11) - \varphi(0) + \varphi(1{,}74) - \varphi(0)$

$P(-1{,}74 <Z<0{,}11)$ = 0,9590+0,5438-1 = **0,5028**

INTERVALLI NEGATIVI

$Z \sim N(0,1)$ calcolare $(z_1<Z< z_2)$ con z_1 e z_2 negativi

Ribalto l'area $[-z_1,- z_2]$ dall'altra parte dell'asse per la SIMMETRIA della curva

$$P(z_1<z< z_2) = P(-z_2<z<- z_1)$$

Calcolare:

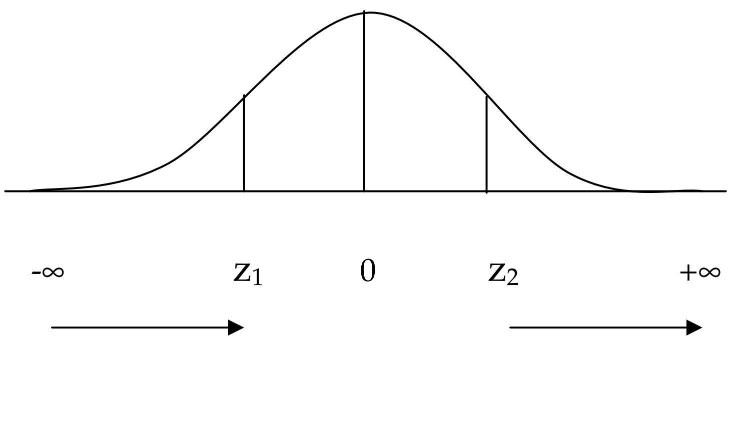
$P(-0,93 <Z<-0,8) \quad = P(0,8<Z<0,93)$

$$\varphi(0,8) = 0,7881$$
$$\varphi(0,93) = 0,8238$$

$P(0,8<Z<0,93) = \varphi\ (0,93) - \varphi\ (0,8) = (0,8238-0,7881) = 0,0357$

INTERVALLI SULLE CODE

$(-\infty$ ad $z_1)$ indica la CODA SINISTRA: $1- \varphi(z_1)$
$(z_2$ ad $+\infty)$ indica la CODA DESTRA: $1- \varphi(z_2)$



Calcolare

$P(Z>1,3)$ $\qquad \varphi\ (1,3) = 0,9032$

$P(Z>1,3) = 1 - 0,9032 =$ **$0,0968 \cong 10\%$**

Calcolare

P(Z<2,325) $\varphi(2{,}325)$ = punto medio tra $\varphi(2{,}32)$ e $\varphi(2{,}33)$

$\varphi(2{,}32) = 0{,}9898$

$\varphi(2{,}33) = 0{,}9901$

$$\varphi(2{,}325) = \frac{0{,}9898 + 0{,}9901}{2} = 0{,}9899$$

P(Z<2,325) = 0,9899 ≅ **99%**

X~N(2;9) Calcolare P(0,412<X<3,12)

$$P(0{,}412<X<3{,}12) = P\left(\frac{0{,}412-2}{3} < Z < \frac{3{,}12-2}{3}\right) = P(-0{,}53 < Z < 0{,}38)$$ abbiamo un estremo negativo e uno positivo

$= \varphi(0{,}53) + \varphi(0{,}38) - 1 =$ P(0,7019) + P(0,6480) – 1 = **0,35**

X~N(0;4) Calcolare P(X>4,66)

$$P(X>4{,}66) = P\left(\frac{x-\mu}{\sigma} > \frac{4{,}66-\mu}{\sigma}\right) = P\left(\frac{x-\mu}{\sigma} > \frac{4{,}66-0}{2}\right) =$$

P(Z>2,33) = F(2,33) = 0,9901

P(Z>2,33) = 1-0,9901 = **0,01** ≅ **1%**