Esercitazione 7 del corso di Statistica (parte 2)

Dott.ssa Paola Costantini

27 Maggio 2009

Esercizio 1

Si dispone di un campione casuale costituito da n = 500 assemblaggi; di questi un numero x = 10 presenta dei difetti. Si determini un intervallo di confidenza al 95% per la probabilità di successo π incognita.
Svolgimento:

$$N = 500$$
$$p = \frac{10}{500} = 0{,}02$$
$$1 - p = 0{,}98$$
$$\alpha = 0{,}05$$
$$\alpha/2 = 0{,}025$$
$$z_{\alpha/2} = 1{,}96$$

$$P\left(p - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{p(1-p)}{N}} \le \pi \le p + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{p(1-p)}{N}}\right) = 1-\alpha$$

$$P \pm z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{p(1-p)}{N}} = 0{,}02 \pm 1{,}96\sqrt{\frac{0{,}02\times 0{,}98}{500}} = 0{,}02 \pm 0{,}0123$$

$$\pi[0{,}0077;0{,}0323]$$

Esercizio 2

Un'azienda vuole stimare la quota di mercato π che occupa il suo prodotto. A tal fine intervista un campione di n = 100 potenziali clienti, di cui il 10% è effettivamente costituito da suoi acquirenti.
a) Determinare un intervallo di confidenza al 99% per la quota di mercato π;
b) qual è la numerosità minima per un errore massimo del 5% ed un rischio di errore del 10%?

<u>Soluzione</u>

a)

L'intervallo di confidenza per la proporzione π è ottenuto da:

$$P\left(p - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \le \pi \le p + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right) = 1-\alpha$$

Considerando che:

$\alpha = 0{,}01$
$\alpha/2 = 0{,}005$
$z_{0,005} = 2{,}58$,

sostituendo le quantità note si ha:

$$P\left(0{,}10 - 2{,}58\sqrt{\frac{0{,}10 \times 0{,}90}{100}} \leq \pi \leq 0{,}10 + 2{,}58\sqrt{\frac{0{,}10 \times 0{,}90}{100}}\right) = 0{,}99$$

da cui:

$$IC_{0,99} = \left[0{,}10 - 0{,}0774; 0{,}10 + 0{,}0774\right] = \left[0{,}0226; 0{,}1774\right]$$

che, tradotto in termini di quota di mercato diventa:

$$IC_{0,99} = \left[2{,}26\%; 17{,}74\%\right]$$

b)

Le quantità note sono:

$e = 0{,}05$
$\alpha = 0{,}10$
$\alpha/2 = 0{,}05$
$z_{0,05} = 1{,}65$

Dal momento che non ci sono informazioni né sulla vera proporzione né sulla sua varianza, ci si pone nell'ipotesi più pessimistica, ossia di una proporzione π pari a 0,5 (ipotesi di massima incertezza sul fenomeno) cui d'altronde corrisponde il valore massimo per la varianza:

$$\sigma_x^2 = \pi(1-\pi) = 0{,}5^2 = 0{,}25$$

In tal caso la numerosità dovrà essere:

$$n > \frac{z_{0,05}^2 * \sigma_x^2}{e^2} = \frac{1{,}65^2 \times 0{,}25}{0{,}05^2} = 270{,}6$$

ossia non inferiore a 271 unità.

Esercizio 3

Supponendo di avere a disposizione i dati relativi alla percentuale di spesa per attività di svago di un campione di 16 individui (vedi tabela sottostante), si determini un intervallo di confidenza al 95% per la varianza incognita della popolazione:

a) non conoscendo la media della popolazione;
b) supponendo che la media della popolazione sia pari a 3,0

i	% di reddito speso
1	5,4
2	3,2
3	4,6
4	7,5
5	1,6
6	2,8
7	0,8
8	4,2
9	3,8
10	2,6
11	1,7
12	3,0
13	1,5
14	4,8
15	3,4
16	2,5

$$s^2 = \frac{1}{n} x_i^2 - \left(\bar{x}^2\right)$$

Svolgimento

a)

$$\bar{X} = 3,338; \quad S^2 = 2,897$$

$$P\left(\frac{(n-1)}{\chi^2_{\left(\alpha/2;n-1\right)}}s^2 < \sigma^2 < \frac{(n-1)}{\chi^2_{\left(1-\alpha/2;n-1\right)}}s^2\right) = 1-\alpha$$

$$\chi^2_{0,025;15} = 27,488 \qquad \chi^2_{0,975;15} = 6,262$$

$$\left[1,581 < \sigma^2 < 6,940\right]$$

b)

Se si conosce la media della popolazione, i gradi di libertà sono n e non (n-1) e il calcolo della varianza campionaria avviene, ovviamente, sottraendo da ogni osservazione la media della popolazione. Nel nostro caso, se per esempio la media della popolazione fosse pari a 3,0 si avrebbe che $\tilde{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum\left(x_i - \mu\right)^2 = 2,83$ $\qquad \chi^2_{0,025;16} = 28,845$ $\qquad \chi^2_{0,975;16} = 6,907$

$$P\left(\frac{n}{\chi^2_{\left(\alpha/2;n\right)}}\tilde{\sigma}^2 < \sigma^2 < \frac{n}{\chi^2_{\left(1-\alpha/2;n\right)}}\tilde{\sigma}^2\right) = 1-\alpha$$

$$\left[1,570 < \sigma^2 < 6,556\right]$$

Come si può notare, la conoscenza della media della popolazione rende l'intervallo più stretto.

Esercizio 4

Una ditta produttrice di batterie per cellulari pubblicizza i propri prodotti garantendo una durata media di 18 ore con uno scarto quadratico medio di 0,5. Poiché ha ricevuto parecchi reclami da parte dei clienti che sostengono che la durata è inferiore, la ditta decide di effettuare una prova di durata su un campione di 10 batterie, ottenendo un tempo medio di accensione di 17,7 ore.

a) sulla base di tale risultato come può la ditta verificare la validità della sua affermazione riguardante la durata media garantita?

Svolgimento

Si richiede di effettuare un test sulla media conoscendo la varianza del carattere osservato, con un livello di significatività del 5%.

IPOTESI	$H_0 : \mu = 18$ $H_1 : \mu < 18$
STATISTICA TEST	$X_{test} = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}}$
VALORI CRITICI	$z = -2,33$
REGOLA DI DECISIONE	Accetto H_0 se $V_{test} > -1,645$
VALORE TEST	$V_{test} = \frac{17,7 - 18}{0,5\sqrt{10}} = -1,896$
DECISIONE	-2,33 < -1,645 si rifiuta l'ipotesi H_0