Esercitazione 1 del corso di Statistica (parte 2)

Dott.ssa Paola Costantini

27 Aprile 2012

Esercizio n 1

Il tempo di percorrenza del treeno che collega la stazione di Roma Termini con l'aeroporto di Fiumicino è di 30 minuti esatti. Il percorso è lungo 30 km e la velocità di percorrenza è costante per tutta la tratta.

a) Si è interessati a valutare la probabilità che il treno interrompa la corsa tra il 15-mo km ed il 19 km per un guasto improvviso. Quanto vale tale probabilità?
b) Calcolare il valore atteso e la varianza della distribuzione di riferimento.

Svolgimento

a) Poiché la velocità di percorrenza del treno è costante è lecito attendersi che la probabilità che il treno interrompa improvvisamente la corsa per un guasto improvviso è costante durante tutta la tratta di percorrenza, e quindi pari a 1/30. La variabile casuale di riferimento X "il treno arresta la sua corsa all'i-esimo km per un guasto improvviso" è quindi la uniforme discreta.

Dal 15-mo al 19-mo km il treno percorre 5 dei 30 km di percorrenza totale. La probabiltà richiesta è pertanto:

$$P(15 \leq X \leq 19) = P[(X = 15) \cup (X = 16) \cup (X = 17) \cup (X = 18) \cup (X = 19)] = 1/30 \cdot 5 = 0{,}17$$

b) Calcolare il valore atteso e la varianza della distribuzione di riferimento:
Il valore atteso e la varianza della variabile casuale X sono pari a:

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \frac{1}{n} = \frac{n+1}{2} = \frac{30+1}{2} = 15{,}5$$

$$Var(X) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - E(X))^2 \frac{1}{n} = \frac{n^2-1}{12} = \frac{30^2-1}{12} = 75{,}08$$

Esercizio n 2

Un giocatore appassionato del gioco del lotto ha osservato che il numero 33 è "ritardatario" sulla ruota di Roma da 100 settimane. Egli è intenzionato a puntare una certa somma di denaro sull'uscita del numero 33 come primo estratto sulla ruota di Roma nella prossima estrazione del lotto. Calcolare la probabilità di vincita alla prossima estrazione e definire la variabile casuale che descrive i possibili esiti della prova calcolando il valore atteso e la varianza.

Svolgimento

La prova è assimilabile ad una estrazione di una pallina da un'urna che contiene 90 palline numerate da1 a 90. Poiché si effettua una sola prova ed i possibili risultati sono due (uscita del numero 33 = successo, uscita di un altro numero = insuccesso), la v.c. che descrive i risultati di questo esperimento è una v.c. di bernoulli di parametri $n = 1$ e $p = 1/90=0,011$ (corrispondente alla probabilità di vincita alla prossima estrazione).

Il valore atteso e la varianza della v.c. X sono pari a

$$E(X) = p = 0,01$$

$$Var(X) = p(1-p) = \frac{1}{90}(1-\frac{1}{90}) = 0,989$$

Esercizio n 3

Un'azienda tessile produce jeans con una percentuale pari all'1% dei capi difettosi. Su una produzione giornaliera di 300 pezzi, si chiede qual è la probabiltà:

a) Di avere 4 capi difettosi;
b) Almeno 5 capi difettosi;
c) Di avere al più 3 capi difettosi;
d) Di avre un numero di capi difettosi compreso tra 2 e 4.
e) Calcolare il valore atteso, la varianza e lo scarto quadratico medio della v.c. percentuale di pezzi difettosi.

Svolgimento

a) $$P(X = x) = f(x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x} = \frac{n!}{x!(n-x)!} p^x q^{n-x}$$

$$P(X = 4) = f(4) = \binom{300}{4} 0,01^4 0,99^{300-4} = \frac{300!}{4!(300-4)!} 0,01^4 0,99^{300-4} = 0,1689$$

b) $$P(X \geq 5) = \sum_{i=5}^{300} \binom{300}{i} 0,01^i 0,99^{300-i} = 1 - F(x_5) = 1 - \sum_{i=0}^{4} \binom{300}{i} 0,01^i 0,99^{300-i}$$

$$P(X = 0) = f(0) = \binom{300}{0} 0,01^0 0,99^{300-0} = 0,049$$

$$P(X = 1) = f(1) = \binom{300}{1} 0,01^1 0,99^{300-1} = 0,1486$$

$$P(X=2)=f(2)=\binom{300}{2}0{,}01^{2}0{,}99^{300-2}=0{,}2244$$

$$P(X=3)=f(3)=\binom{300}{3}0{,}01^{3}0{,}99^{300-3}=0{,}2252$$

$$P(X\geq 5)1-(0{,}049+0{,}1486+0{,}2244+0{,}2252+0{,}1689)=1-0{,}8161=0{,}1839$$

c) $P(X\leq 3)=f(x_3)=\sum_{i=0}^{3}\binom{300}{ì}0{,}01^{i}0{,}99^{300-i}=0{,}049+0{,}1486+0{,}2244+0{,}2252=0{,}6452$

d) $P(2\leq X\leq 4)=f(x_4)-f(x_2)=\sum_{i=2}^{4}\binom{300}{ì}0{,}01^{i}0{,}99^{300-i}=0{,}2244+0{,}2252+0{,}1689=0{,}6185$

c) E(X) = n*p=300*0,01=3

Var(X) = n*p*(1-p) = 300*0,01+0,99 = 2,97

$\sqrt{Var(X)}=\sqrt{n*p*(1-p)}=\sqrt{300*0{,}01*0{,}99}=\sqrt{2{,}97}=1{,}723$

Esercizio n 4

All'aeroporto di Linate in 10 minuti atterrano normalmente 2 aerei. Calcolare la probabiltà che in 20 minuti ne atterrino 3.

Svolgimento

La variabile casuale cui fa riferimento l'esercizio è la v.c. di Poisson. Tale v.c. è caratterizzata dal fatto che assume valori discreti, ma è definita in un intervallo continuo.
Affinchè ci sia una legge di Poisson gli intervalli possono esssere divisi in sottointervalli in modo tale che la probabilità di avere più di un successo in quel sottointervallo sia ~ 0. Inoltre gli eventi nei diversi sottointervalli devono essere ripetibili.
La v.c. di Poisson assume un unico parametro λ, che ne rappresenta sia il valore atteso che la varianza.

$$X\sim Poi(\lambda)$$

λ=2 (cioè due atterraggi nell'intervallo considerato)

$$P(X=x)=\frac{\lambda^{x}}{x!}e^{-\lambda}\text{ in questo caso }\lambda\text{ diviene }4$$

$$P(X=3)=\frac{4^{3}}{3!}e^{-4}=\frac{64}{6}0{,}018=0{,}1964$$

Esercizio n 5

Sia X una v.c. che si distribuisce come una normale avente media 350 e varianza 100. Si calcoli la probabilità che:

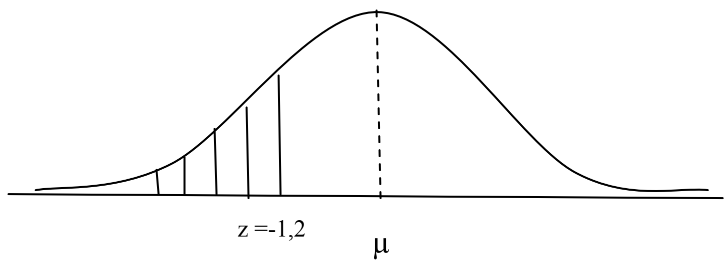
a) x sia minore di 338;
b) x sia maggiore di 338;
c) x sia compreso tra 325 e 375;
d) x sia compreso tra 335 e 345;
e) x sia compreso tra 360 e 379;
f) x sia maggiore di 350.

X~N(350;100)

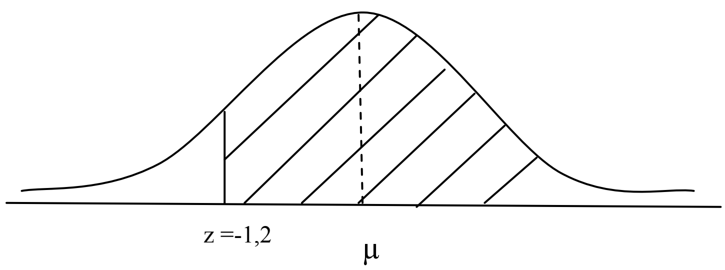
a) $z = \frac{x-\mu}{\sigma} = \frac{338-350}{10} = -1{,}2$

P(x<328) = P(z < -1,2) =0,1151

Dalla lettura delle tavole della v.c. normale standardizzata si ha che tale probabilità è pari a 0,1151. Infatti, l'ordinanza z =1,2 della suddetta curva riporta un valore pari a 0,8849. Dalla simmetria della v.c. normale segue che P(z < -1,2) = 1-P(z >1,2)=0,1151.



b) Dal quesito precedente segue che P(x>338)=P(z > -1,2) = 0,8849

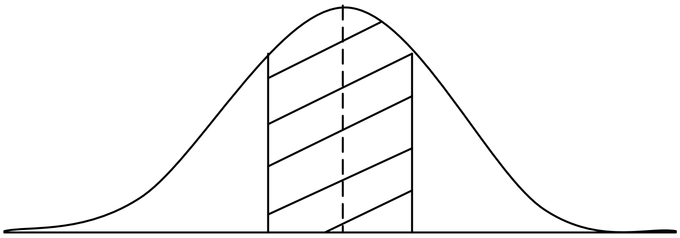


c) $z_1 = \frac{325-350}{10} = -2{,}5$ $\qquad$ $z_2 = \frac{375-350}{10} = 2{,}5$

P(225 < x < 275) = P(-2,5 < z < 2,5) = 0,9876

Bisogna trovare la probabiltà compresa tra le ordinate di z comprese tra 2,5 e -2,5 della v.c. normale standardizzata. Dalle tavole si ha che il valore 2,5 è pari a 0,99379

$$P(z_1<Z< z_2) = \varphi(-z_1) + \varphi(z_2) -1 = (0,99379+0,99379) -1 = 0,9876$$



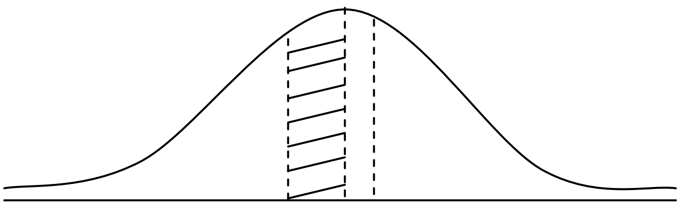
d) $z_1 = \frac{335-350}{10} = -1,5$ $z_2 = \frac{345-350}{10} = -0,5$

Procediamo come nel quesito precedente

P(335 < x < 345) = P(-1,5 < z < -0,5) = P(0,5<z<1,5) = 0,9876

P(0,5 <Z<1) φ (1,5) = 0,93319
φ (0,5) = 0,69146
φ (1,5) - φ (0,5) = 0,2417

P(0,69146<Z<0,93319) = P(0,93319-0,69146) = 0,2417



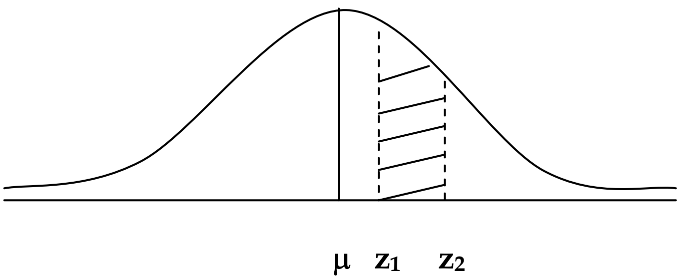
e) $z_1 = \frac{360-350}{10} = 1$ $z_2 = \frac{379-350}{10} = 2,9$

Procediamo come nel quesito precedente

P(360 < x < 379) = P(1< z < 2,9) =

P(1 < Z < 2,9) φ (1) = 0,84134
φ (2,9) = 0,99813
φ (2,9) - φ (1) = 0,99813-0,84134=0,1568

P(0,99813<Z<0,84134) = P(0,99813-0,84134) = 0,1568



f) Essendo il valore x uguale al valor medio della v.c. di riferimento, l'ordinanza z risulta pari a 0 e quindi, com'è noto, la probabilità risulta pari a 0,5.