Esercitazione 6 del corso di Statistica 2

Dott.ssa Paola Costantini

25 Febbraio 2009

Considerando la seguente popolazione di famiglie secondo il numero dei componenti "giovani" (X, di età inferiore a 21 anni) e "adulti" (Y, di età non inferiore a 21 anni).

Tabella 1.

X \ Y	1	2	3	Tot.
0	20	90	0	110
1	15	190	15	220
2	5	240	135	380
3	0	80	50	130
	40	600	200	840

a. Costruire la corrispondente funzione di probabilità congiunta delle v.c. X e Y e determinare: $E(X)$, $E(Y)$, $E(X*Y)$, Var (X), Var (Y), E(X|Y=2), E(Y|X=3),
b. È possibile dire che X ed Y sono stocasticamente indipendenti?
c. Se non lo sono calcolare Cov(X,Y) e ρ;

Tabella 2.

X \ Y	1	2	3	Tot.
0	0,024	0,107	-	0,131
1	0,018	0,226	0,018	0,262
2	0,006	0,286	0,161	0,453
3	-	0,095	0,059	0,154
	0,048	0,714	0,238	1

Il Valore atteso della componente X è dato da:

$$E(X) = \sum_{i=1}^{h} x_i p_i = 0*0,131+1*0,262+2*0,453+3*0,154 = 1,63$$

Il Valore atteso della componente Y è dato da:

$E(Y) = \sum_{j=1}^{k} y_j p_i$ 1*0,048+2*0,714+3*0,238= 2,19

E(X,Y) = $\sum_{i=1}^{h}\sum_{j=1}^{k} x_i y_j p_{ij}$ = 0*1*0,024+0*2*0,107+1*1*0,018+1*2*0,226+…..+3*3*0,059 = 3,747.

Le varianze delle componenti (X) e (Y) sono date da:

Var(X)= $Ex^2 - (Ex)^2$ e Var(Y)= $Ey^2 - (Ey)^2$

$Ex^2 = \sum_{i=1}^{h} x_i^2 p_i$ =0*0,131+1*0,262+4*0,453+9*0,154 = 3,46

$(Ex)^2$= $1{,}63^2$= 2,65

Var(X)=3,46-2,65=0,81

$Ey^2 = \sum_{j=1}^{k} y_i^2 p_j$ = 1*0,048+4*0,714+9*0,238= 5,046

$(Ey)^2$= $2{,}19^2$= 4,8

Var(Y)=5,046-4,8=0,246

E(X | Y=2) = 0*0,107+1*0,226+2*0,286+3*0,095 = 1,083

E(Y | X=3) = 1*0+2*0,095+3*0,059= 0,367

b.
se due variabili casuali sono stocasticamente indipendenti allora

$$p_{ij} = p_{\bullet i} p_{\bullet j} \rightarrow \forall i, j$$

Nel nostro caso invece

$$p_{ij} \neq p_{\bullet i} p_{\bullet j}$$

Per cui calcoliamo la covarianza ed il coefficiente di correlazione lineare

$Cov(X,Y) = E(X,Y) - E(X)E(Y)$ = 3,747-1,63*2,19=0,1773

$$\rho = \frac{Cov(X,Y}{\sqrt{Var(X)\cdot Var(Y)}} = \frac{0{,}1773}{0{,}446} = 0{,}397$$

Esercizio 2. Combinazioni lineari

In uno studio sull'alimentazione delle persone che lavorano è risultato che la quantità di calorie che assumono durante il pranzo può essere descritta da una v.c. X con media 800 e scarto quadratico medio 150, mentre la quantità di calorie che assumono durante la cena può essere descritta da una v.c. Y con media 1300 e scarto quadratico medio 230. Sapendo che la covarianza fra Y e X è pari a 1250, calcolare la media e lo scarto quadratico medio della quantità complessiva di calorie assunta nei due pasti.

$$E\left[\sum_{i=1}^{n} a_i X_i\right] = \sum_{i=1}^{n} a_i E[X_i] = \frac{1}{2}X + \frac{1}{2}Y$$

$$E[X+Y] = \mu_x + \mu_y = 800 + 1300 = 2100$$

$$Var[X+Y] = \sigma_x^2 + \sigma_y^2 + 2\sigma_{xy} = 52900 + 22500 + 2\cdot 1250 = 77900 \rightarrow \sigma_{x+y} = 279$$

Esercizio n.3

Un esame è composto da due prove delle quali la prima è scritta e la seconda è orale. I voti conseguiti dagli studenti nella prova scritta possono essere rappresentati da una v.c. X che ha media 24 e varianza 9, mentre i voti conseguiti nella prova orale possono essere descritti da una v.c. Y che ha media 22 e varianza 6. Il docente attribuisce maggior peso alla prova scritta sicchè il voto finale è una combinazione lineare dei voti riportati nelle due prove (2/3)X+(1/3)Y. Sapendo che la covarianza fra X e Y è 10, calcolare la media e lo scarto quadratico medio del voto finale.

$$E\left[\frac{2}{3}X + \frac{1}{3}Y\right] = \mu_{(2/3)X+(1/3)Y} = 24\,\frac{2}{3} + 22\,\frac{1}{3} = 16 + 7{,}3 = 23{,}33$$

$$Var\left[\frac{2}{3}X + \frac{1}{3}Y\right] = \left(\frac{2}{3}\right)^2 \sigma_x^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 \sigma_y^2 + 2\sigma_{xy} = 0{,}444\cdot 9 + 0{,}111\cdot 6 + (0{,}67\cdot 0{,}334\cdot 2\cdot 10) = 4 + 0{,}67 +$$

$$+ 4{,}556 = 9{,}26 \rightarrow \sigma_{(2/3)X+(1/3)Y} = 3{,}03$$

Esercizio n. 4

L'assunzione presso un'azienda dipende dal superamento di 4 prove, 2 scritte, una teorico-pratica e una orale. I punteggi conseguiti dai candidati possono essere rappresentati da 4 v.c. X, Y, Z, P. Le due prove scritte, X e Y hanno media rispettivamente

pari a 25 e 24 e varianza pari a 6 e 8. La prova teorico-pratica Z ha una media pari a 28 e una varianza pari a 9. La prova orale P ha media pari a 27 e varianza pari a 6.
Alle due prove scritte è attribuito un peso maggiore sicchè il punteggio finale è una combinazione lineare dei punteggi ottenuti nelle singole prove. Sapendo che le variabili sono tra di loro incorrelate, calcolare la media e lo scarto quadratico medio del punteggio finale.

$$E\left[0{,}30\,X + 0{,}30\,Y + 0{,}20\,Z + 0{,}20\,P\right] = 25 * 0{,}3 + 24 * 0{,}3 = 28 * 0{,}2 + 27 * 0{,}2 = 25{,}7$$

$$Var\left[0{,}30\,X + 0{,}30\,Y + 0{,}20\,Z + 0{,}20\,P\right] = 0{,}3^2 * 6 + 0{,}3^2 * 8 + 0{,}2^2 * 6 + 0{,}2^2 * 9 = 1{,}86$$

$$\sigma^2 = 1{,}86 \rightarrow \sigma = 1{,}36$$