Esercitazione 2 del corso di Statistica (parte 2)

Dott.ssa Paola Costantini

23 Gennaio 2012

Esercizio n. 1

Il gestore di una stazione di servizio regala un gratta e vinci ad ogni cliente. Egli garantisce che ogni gratta e vinci ha probabilità 0,05 di contenere un messaggio che dà diritto a 20 euro di benzina gratuiti. Un automobilista decide di far rifornimento sempre nella stessa stazione finché non ottiene un gratta e vinci con il messaggio vincente.

a) qual è la probabilità che un gratta e vinci con il messaggio vincente si verifichi al quinto acquisto di benzina?
b) Qual è il numero medio di acquisti di benzina che l'automobilista deve effettuare affinché si verifichi il gratta e vinci con il messaggio vincente?

Soluzione

a) La funzione di probabilità della v.c. geometrica è $P(X = x) = (1-\pi)^{x-1}\pi$, da cui:

$$P(X = 5) = (1-0{,}05)^{5-1} * 0{,}05 = 0{,}0407$$

b) Il valore atteso di X è E[X]= $\frac{1}{\pi} = \frac{1}{0{,}05} = 20$ acquisti di benzina.

Esercizio n. 2

Un mazzo di carte francesi è composto da 52 carte, fra le quali vi sono 13 carte di fiori e 4 assi. Un giocatore sceglie a caso, senza rimessa, 5 carte da mazzo,

a. qual è a probabilità che siano tutte carte di fiori?

b. qual è la probabilità che 4 delle 5 carte siano assi?

Svolgimento

Quando l'estrazione avviene in blocco (senza reimmissione) la v.c. che descrive il numero di unità favorevoli nelle *n* estrazioni è *ipergeometrica*. La sua distribuzione dipende da 3 parametri: N = numero complessivo delle unità, F = casi favorevoli e n = numero di estrazioni.

$$X \sim \mathrm{IP}(N; F; n)$$

La probabilità che X assuma valore x si calcola come rapporto tra casi favorevoli e casi possibili.

$$P(X=x)=\frac{\binom{F}{x}\binom{N-F}{n-x}}{\binom{N}{n}}=\frac{\frac{F!}{x!(F-x)!}\frac{(N-F)!}{(n-x)!(N-F-n+x)!}}{\frac{N!}{n!(N-n)!}}$$

a. $X \sim \text{IP}(52;13;5)$

$$P(X=5)=\frac{\binom{13}{5}\binom{52-13}{5-5}}{\binom{52}{5}}=\frac{\frac{13!}{5!(13-5)!}\frac{(52-13)!}{(5-5)!(52-13-5+5)!}}{\frac{52!}{5!(52-5)!}}=0{,}000495$$

b. $X \sim \text{IP}(52;4;5)$

$$P(X=4)=\frac{\binom{4}{4}\binom{52-4}{5-4}}{\binom{52}{5}}=\frac{\frac{4!}{4!(4-4)!}\frac{(52-4)!}{(5-4)!(52-4-5+4)!}}{\frac{52!}{5!(52-5)!}}=0{,}0000184$$

Esercizio n. 3

Si consideri un'urna composta da 12 palline: 5 verdi, 4 rosse e 3 blu. Si supponga di estrarre a caso, senza reimmissione, 3 palline dsall'urna:

Qual è la probabilità che siano tutte blu?

$X \sim \text{IP}(12;3;3)$

$$P(X=3)=\frac{\binom{3}{3}\binom{12-3}{3-3}}{\binom{12}{3}}=\frac{\frac{3!}{3!(3-3)!}\frac{(12-3)!}{(3-3)!(12-3-3+3)!}}{\frac{12!}{3!(12-3)!}}=0{,}0045$$

Esercizio n. 4

Il tempo impiegato da un commesso di un negozio per assistere i clienti si distribuisce come una variabile casuale esponenziale negativa. In media il commesso impiega 10 minuti per ogni cliente. Si vuole calcolare la probabilità che, per assistere un cliente, il commesso impieghi un tempo compreso tra 5 e 15 minuti. Il parametro λ è dato dal reciproco della media: $\lambda = 1/10$

X ~Exp(1/10)

La funzione di probabilità di una variabile casuale esponenziale negativa è data da:

$$F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$$

Soluzione

$$P(5 \leq x \leq 15) = F(15) - F(5) = 1 - e^{-\frac{15}{10}} - \left[1 - e^{-\frac{5}{10}}\right] = e^{-\frac{1}{2}} - e^{-\frac{3}{2}} = 0{,}6065 - 0{,}2231 = 0{,}3835$$

Esercizio n. 5

Un professore incontra regolarmente gli studenti durante l'orario di ricevimento. Il tempo trascorso con ciascuno studente si distribuisce come una v.c. esponenziale negativa con media 15 minuti. Determinare la probabilità che:

- uno studente trascorra con il professore meno di 20 minuti;
- uno studente trascorra con il professore più di 5 minuti;
- uno studente trascorra con il professore un tempo compreso tra 10 e 15 minuti.

Soluzione

X~Exp(λ)= X~Exp$\left(\frac{1}{15}\right)$

a) $P(X \leq 20) = 1 - e^{-\frac{20}{15}} = 0{,}7364$

b) $P(X \geq 5) = 1 - \left[1 - e^{-\frac{20}{15}}\right] = 1 - 0{,}2834 = 0{,}7166$

c) $P(10 \leq x \leq 15) = F(15) - F(10) = 1 - e^{-\frac{15}{15}} - \left[1 - e^{-\frac{10}{15}}\right] = e^{-0{,}67} - e^{-1} = 0{,}5117 - 0{,}3678 = 0{,}1439$

Esercizio 6

Il tempo di attesa ad uno sportello bancomat si distribuisce normalmente come media 1 e scarto quadratico medio 2.
Qual è la probabilità che un servizio richieda:

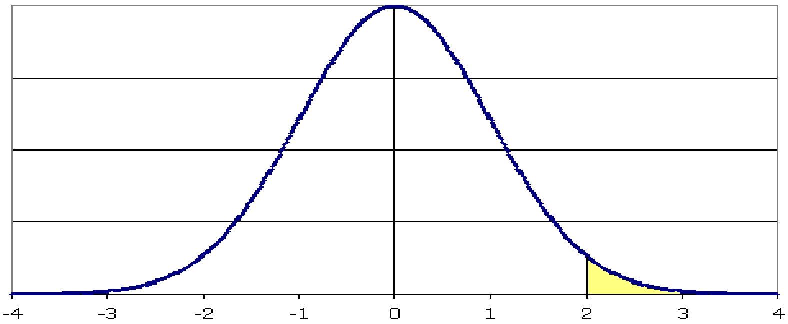
a) più di 5 minuti
b) meno di 2 minuti
c) fra i 3 e i 6 minuti
d) al massimo 3 minuti?

Soluzione

X ~ N(1; 4)
σ = 2

a)

$$P(X > 5) = P\left(Z > \frac{5-1}{2}\right) = P(Z > 2)$$

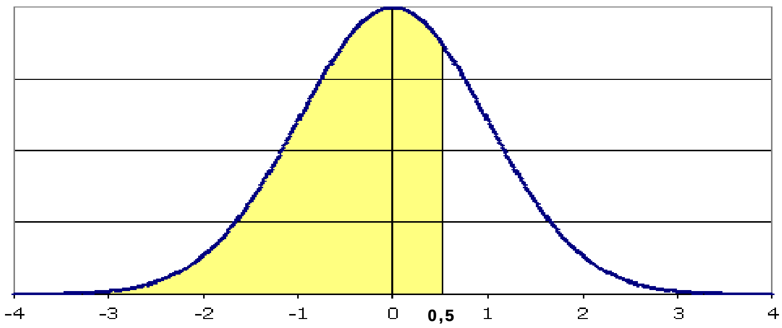


z	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	...	...
...	...	...	...	...	...	...	...	...
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	...	...
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	...	...
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	...	...
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	...	...
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	...	...
...	...	...	...	...	...	...	...	...

$$\mathbf{P(Z > 2) = 1 - P(z \leq 2) = 1 - 0{,}9772 = 0{,}0028}$$

b)

$$P(X \leq 2) = P\left(Z \leq \frac{2-1}{2}\right) = P(Z \leq 0{,}5)$$

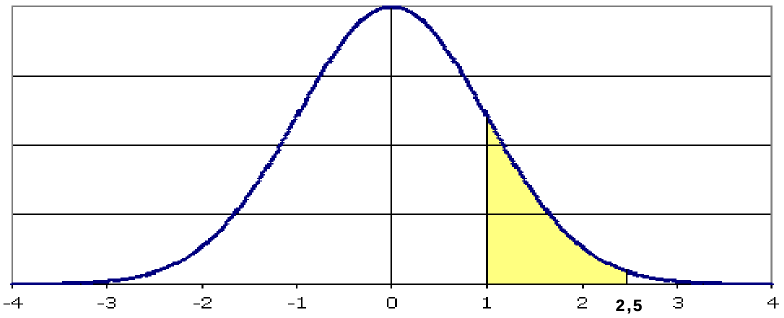


z	0	0,01	0,02	0,03	0,04	...	...
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	...	...
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	...	...
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	...	...
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	...	...
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	...	...
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	...	...
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	...	...
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	...	...
...	...	...	...	...	...	...	...

$P(Z \leq 0{,}5) = 0{,}6915$

c)

$$P(3 \leq X \leq 6) \;=\; P\left(\frac{3-1}{2} \leq Z \leq \frac{6-1}{2}\right) = P(1 \leq Z \leq 2{,}5)$$

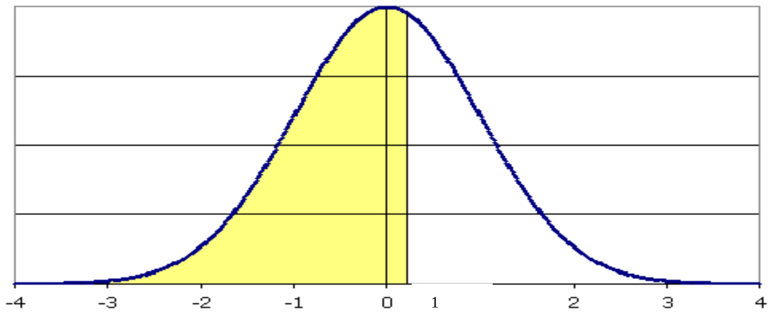


z	0	0,01	0,02	0,03	0,04	...
...	...	...	...	...	...	...
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	...
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	...
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	...
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	...
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	...
...	...	...	...	...	...	...
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	...
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	...
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	...
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	...
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	...
...	...	...	...	...	...	...

$P(1 \leq Z \leq 2{,}5) = 0{,}9938 - 0{,}8413 = 0{,}1525$

d)

$$P(X \leq 3) \;=\; P\left(Z \leq \frac{3-1}{2}\right) = P(Z \leq 1)$$



z	0	0,01	0,02	0,03	0,04	...
...	...	...	...	...	...	...
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	...
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	...
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	...
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	...
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	...

$P(Z \leq 1) = 0{,}841$