Esercitazione 2 del corso di Statistica (parte 2)

Dott.ssa Paola Costantini

22 Aprile 2009

Esercizio n. 1

Supponiamo di avere un'urna contenente 12 palline, di cui 5 verdi, 3 blu e 4 rosse. Si vuole determinare la probabilità che, estraendo due palline con e senza reimmissione, esse siano:

a. dello stesso colore;
b. al più una pallina verde;
c. due palline di cui almeno una blu;

Soluzione

Estrazione Bernoulliana (o con reimmissione)

a. ("due palline dello stesso colore")

$$P[(R_1 \cap R_2) \cup (V_1 \cap V_2) \cup (B_1 \cap B_2)] = P(R_1 \cap R_2) + P(V_1 \cap V_2) + P(B_1 \cap B_2) =$$

$$= P(R_1) \cdot P(R_2) + P(V_1) \cdot P(V_2) + P(B_1) \cdot P(B_2) =$$

$$= \left(\frac{4}{12} \cdot \frac{4}{12}\right) + \left(\frac{5}{12} \cdot \frac{5}{12}\right) + \left(\frac{3}{12} \cdot \frac{3}{12}\right) = \frac{16}{144} + \frac{25}{144} + \frac{9}{144} = \frac{50}{144} = 0,347$$

b. ("al più una pallina verde")

$$P\left[\left(V_1 \cap \overline{V_2}\right) \cup \left(\overline{V}_1 \cap V_2\right) \cup \left(\overline{V_1} \cap \overline{V_2}\right)\right] =$$

$$= P\left[\left(V_1 \cap \overline{V_2}\right) + \left(\overline{V}_1 \cap V_2\right) + \left(\overline{V_1} \cap \overline{V_2}\right)\right] = P(V_1) \cdot P(\overline{V_2}) + P(\overline{V_1}) \cdot P(V_2) + P(\overline{V_1}) \cdot P(\overline{V_2}) =$$

$$= \frac{5}{12} \cdot \frac{7}{12} + \frac{7}{12} \cdot \frac{5}{12} + \frac{7}{12} \cdot \frac{7}{12} = \frac{35}{144} + \frac{35}{144} + \frac{49}{144} = \frac{119}{144} = 0,82$$

c. ("due palline di cui almeno una blu")=

$$P\left[\left(B_1 \cap \overline{B_2}\right) \cup \left(\overline{B_1} \cap B_2\right) \cup (B_1 \cap B_2)\right] = P(B_1) \cdot P(\overline{B_2}) + P(\overline{B_1}) \cdot P(B_2) + P(B_1) \cdot P(B_2) =$$

$$= \frac{3}{12} \cdot \frac{9}{12} + \frac{9}{12} \cdot \frac{3}{12} + \frac{3}{12} \cdot \frac{3}{12} = 0{,}4375$$

Estrazione in blocco (o senza reimmissione):

a. ("due palline dello stesso colore")

$$P\left[(R_1 \cap R_2) \cup (V_1 \cap V_2) \cup (B_1 \cap B_2)\right] = P(R_1 \cap R_2) + P(V_1 \cap V_2) + P(B_1 \cap B_2) =$$

$$= P(R_1) \cdot P(R_2 | R_1) + P(V_1) \cdot P(V_2 | V_1) + P(B_1) \cdot P(B_2 | B_1) =$$

$$= \left(\frac{4}{12} \cdot \frac{3}{11}\right) + \left(\frac{5}{12} \cdot \frac{4}{11}\right) + \left(\frac{3}{12} \cdot \frac{2}{11}\right) = \frac{12}{132} + \frac{20}{132} + \frac{6}{132} = \frac{38}{132} = 0{,}287$$

b. ("al più una pallina verde")

$$P\left[\left(V_1 \cap \overline{V_2}\right) \cup \left(\overline{V}_1 \cap V_2\right) \cup \left(\overline{V_1} \cap \overline{V_2}\right)\right] =$$

$$= P\left[\left(V_1 \cap \overline{V_2}\right) + \left(\overline{V}_1 \cap V_2\right) + \left(\overline{V_1} \cap \overline{V_2}\right)\right] = P(V_1) \cdot P(\overline{V_2} | V_1) + P(\overline{V_1}) \cdot P(V_2 | \overline{V_1}) + P(\overline{V_1}) \cdot P(\overline{V_2} | \overline{V_1}) =$$

$$= \frac{5}{12} \cdot \frac{7}{11} + \frac{7}{12} \cdot \frac{5}{11} + \frac{7}{12} \cdot \frac{6}{11} = \frac{119}{132} = 0{,}84$$

c. ("due palline di cui almeno una blu")=

$$P\left[\left(B_1 \cap \overline{B_2}\right) \cup \left(\overline{B_1} \cap B_2\right) \cup (B_1 \cap B_2)\right] = P(B_1) \cdot P(\overline{B_2} | B_1) + P(\overline{B_1}) \cdot P(B_2 | \overline{B_1}) + P(B_1) \cdot P(B_2 | B_1) =$$

$$= \frac{3}{12} \cdot \frac{9}{11} + \frac{9}{12} \cdot \frac{3}{11} + \frac{3}{12} \cdot \frac{2}{11} = 0{,}4545$$

Esercizio n. 2

Dalla stessa urna contenente 12 palline, di cui 5 verdi, 3 blu e 4 rosse. Si consideri l'esperimento consistente nell'estrazione di tre palline dall'urna, costruire le variabili casuali:
X: n. di palline blu estratte (estrazione con ripetizione)
Z: n. di palline blu estratte (estrazione senza ripetizione

X: n. palline blu estratte (con ripetizione)

Spazio degli eventi	x_i	p_i	P_i
P($\overline{B_1} \cap \overline{B_2} \cap \overline{B_3}$)	0	0,4218	0,4218
P($B_1 \cap \overline{B_2} \cap \overline{B_3}$)	1	0,4218 (0,14*3)	0,8436
P($\overline{B_1} \cap B_2 \cap \overline{B_3}$)			
P($\overline{B_1} \cap \overline{B_2} \cap B_3$)			
P($\overline{B_1} \cap B_2 \cap B_3$)	2	0,14 (0,047*3)	0,9836
P($B_1 \cap \overline{B_2} \cap B_3$)			
P($B_1 \cap B_2 \cap \overline{B_3}$			
P($B_1 \cap B_2 \cap B_3$)	3	0,0157	1

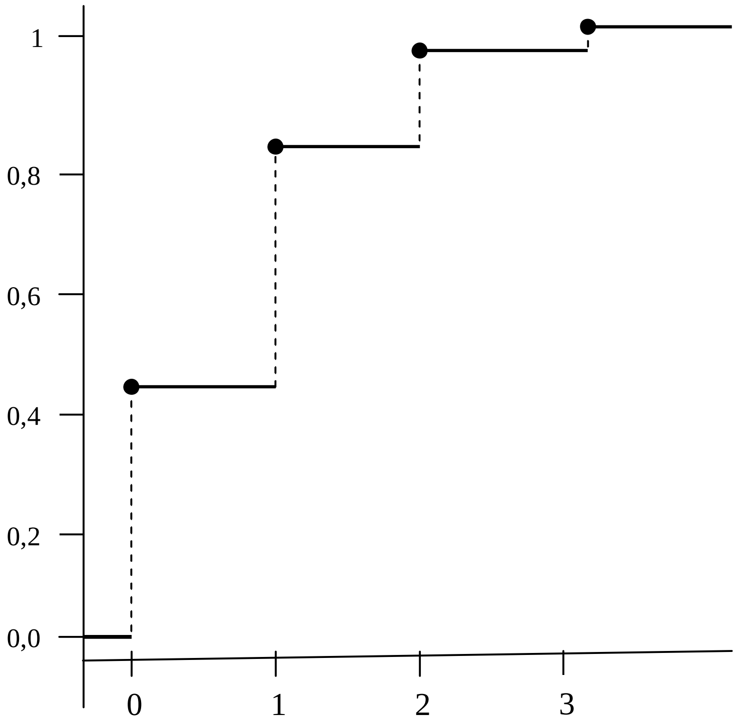
$$= \frac{9}{12} * \frac{9}{12} * \frac{9}{12} = 0{,}4218$$

$$= \frac{9}{12} * \frac{9}{12} * \frac{3}{12} = 0{,}1406 \text{ (1° caso)}$$

$$\frac{9}{12} * \frac{3}{12} * \frac{3}{12} = 0{,}1406 \quad \text{(1° caso)}$$

$$= \frac{3}{12} * \frac{3}{12} * \frac{3}{12} = 0{,}0157$$

Rappresentazione della *Funzione di ripartizione*



F(x)=0, per $x < 0$
F(x)=0,4218 per $0 \leq x \leq 1$
F(x)=0,8436 per $1 \leq x \leq 2$
F(x)=0,9836 per $2 \leq x \leq 3$
F(x)=1 per $x \geq 3$

Z: n. palline blu estratte (senza ripetizione)

Spazio degli eventi	x_i	p_i	P_i
P($\overline{B_1} \cap \overline{B_2} \cap \overline{B_3}$)	0	0,3818	0,3818
P($B_1 \cap \overline{B_2} \cap \overline{B_3}$)	1	0,49 (0,163*3)	0,8718
P($\overline{B_1} \cap B_2 \cap \overline{B_3}$)			
P($\overline{B_1} \cap \overline{B_2} \cap B_3$)			
P($\overline{B_1} \cap B_2 \cap B_3$)	2	0,123 (0,041*3)	0,9946
P($B_1 \cap \overline{B_2} \cap B_3$)			
P($B_1 \cap B_2 \cap \overline{B_3}$			
P($B_1 \cap B_2 \cap B_3$)	3	0,0045	1

$$= \frac{9}{12} * \frac{8}{11} * \frac{7}{10} = 0{,}3818$$

$$= \frac{9}{12} * \frac{8}{11} * \frac{3}{10} = 0{,}1636 \text{ (1° caso)}$$

$$= \frac{9}{12} * \frac{3}{11} * \frac{2}{10} = 0{,}1406 \text{ (1° caso)}$$

$$= \frac{3}{12} * \frac{2}{11} * \frac{1}{10} = 0{,}0157$$

F(x)=0	per $x < 0$
F(x)=0,3818	per $0 \leq x \leq 1$
F(x)=0,8718	per $1 \leq x \leq 2$
F(x)=0,9946	per $2 \leq x \leq 3$
F(x)=1	per $x \geq 3$

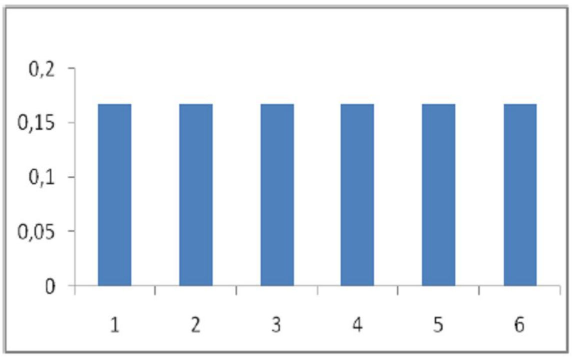
Esercizio n. 3

Si consideri l'esperimento lancio di un dado non truccato. Sia X la variabile casuale che assume valore pari alla faccia uscita;

1) Specificare la distribuzione di probabilità della variabile e rappresentarla graficamente
2) Calcolare valore atteso e varianza usando le definizioni generali
3) Calcolare valore atteso e varianza usando quanto noto sulla distribuzione uniforme discreta.

La variabile casuale X è rappresentata di seguito in forma tabellare e in forma grafica:

X	P(x)
1	1/6 = 0,167
2	1/6 = 0,167
3	1/6 = 0,167
4	1/6 = 0,167
5	1/6 = 0,167
6	1/6 = 0,167



Calcolo del valore atteso secondo la definizione generale:

$$E(X)=\sum_i x_i p(x_i)=1\times\frac{1}{6}+2\times\frac{1}{6}+\ldots+5\times\frac{1}{6}+6\times\frac{1}{6}=3.5$$

Calcolo della varianza secondo la definizione generale:

$$\begin{aligned}
\sigma_X^2 &= E(X-\mu)^2 \\
&= \sum_i (x_i-\mu)^2\, p(x_i) \\
&= (1-3.5)^2\times\frac{1}{6}+\ldots+(6-3.5)^2\times\frac{1}{6} \\
&= 2.91667
\end{aligned}$$

La variabile casuale X è una variabile casuale uniforme discreta: X ~ Ud(6)

E' possibile calcolarne il valore atteso come di seguito indicato:

$$E(X)=\frac{n+1}{2}=\frac{6+1}{2}=3.5$$

e la sulla varianza come:

$$\sigma_X=E(X-\mu)^2=\frac{n^2-1}{12}=\frac{6^2-1}{12}=2.91667$$