Esercitazione 5 del corso di Statistica 2

Prof. Domenico Vistocco

Dott.ssa Paola Costantini

19 Maggio 2008

Esercizio n 1

Il diametro in millimetri dei bulloni prodotti da un'azienda ha una distribuzione normale con media 12 e scarto quadratico medio 0,15. Si vuole calcolare che il diametro sia compreso tra 11,8 e 12,1 millimetri. Sia X la variabile casuale che descrive il diametro dei bulloni:

$$X \sim N(12; 0{,}15^2)$$

Soluzione

La probabilità che X assuma valori nell'intervallo (11,8; 12,1) è data da:

$P(11{,}8 \leq Z \leq 12{,}1) =$

$$P\left(\frac{11{,}8-12{,}0}{0{,}15} \leq Z \leq \frac{12{,}1-12{,}0}{0{,}15}\right) = P(-1{,}33 \leq z \leq 0{,}67) = \phi(0{,}67) - \phi(-1{,}33) = \phi(0{,}67) - [1-\phi(1{,}33)] =$$
$$= 0{,}7486 - (1-0{,}9082) = 0{,}6568$$

Oppure $\phi(0{,}67) - \phi(0) + \phi(1{,}33) - \phi(0) = (0{,}7486 - 0{,}5) + (0{,}9082 - 0{,}5) = 0{,}2486 + 0{,}4082 = 0{,}6568$

Oppure $\phi(0{,}67) + \phi(1{,}33) - 1 = 0{,}7486 + 0{,}9082 - 1 = 0{,}6568$

Esercizio n 2

Il percorso in km che un'utilitaria compie con un litro di carburante ha una distribuzione Normale con media 25 e scarto quadratico medio 3. Determinare la probabilità che:

a) percorra più di 27 km;
b) percorra meno di 21 km;
c) il percorso sia compreso fra 21 e 27 km.

Soluzione

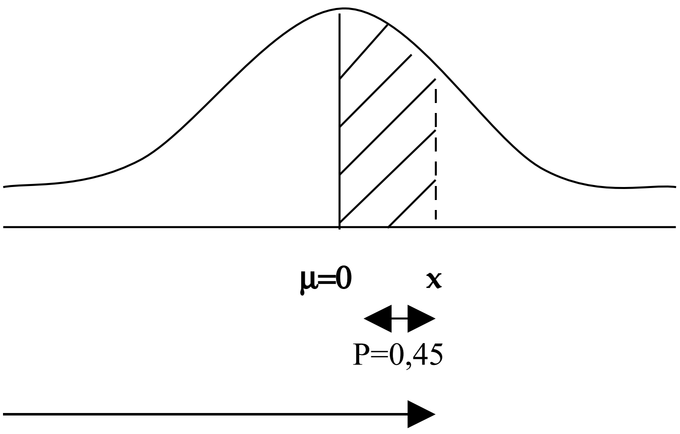
a) $P(X \geq 27) = P\left(Z \geq \frac{27-25}{3}\right) = P(Z \geq 0{,}67) = 1-\phi(0{,}67) = 1-0{,}7486 = 0{,}2514$

b) $P(X \leq 21) = P\left(Z \leq \frac{21-25}{3}\right) = P(Z \geq -1{,}33) = 1-\phi(1{,}33) = 1-0{,}9082 = 0{,}0918$

$c) P(21 \leq X \leq 27) = P\left(\frac{21-25}{3} \leq Z \leq \frac{27-25}{3}\right) = P(-1{,}33 \leq Z \geq 0{,}67) = \phi(1{,}33) + \phi(0{,}67) - 1 = 0{,}7486$
$+ 0{,}9082 - 1 = 0{,}6568$

Esercizio n. 3

X~N(0;4). Trovare il valore della *x* tale che P(0<X<x)=0,45



P=0,95 P(X < x) = 0,95

Voglio trovare il valore di x tale che fino ad esso ho cumulato il 95% della Probabilità.

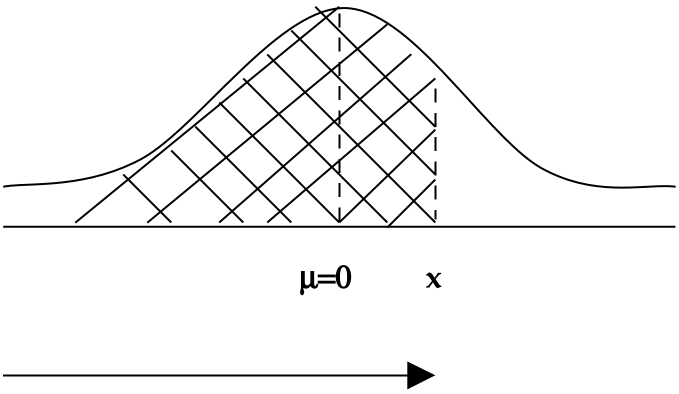
La nostra X~N, ma non è standardizzata, cioè: $P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{x-\mu}{\sigma}\right) = 0{,}95$

$P(Z < z) = 0{,}95 \quad z = 1{,}645 = (1{,}64 + 1{,}65)/2$

Se $z = \frac{x-\mu}{\sigma} = 1{,}645 \rightarrow \frac{x-0}{\sqrt{4}} = 1{,}645 \rightarrow x = 2 * 1{,}645 = 3{,}29$

Esercizio n. 4

X~N(2;1). Trovare il valore della *x* tale che P(X<x)=0,90



P=0,90 P(X < x) = 0,90

Voglio trovare il valore di x tale che fino ad esso ho cumulato il 90% della Probabilità.

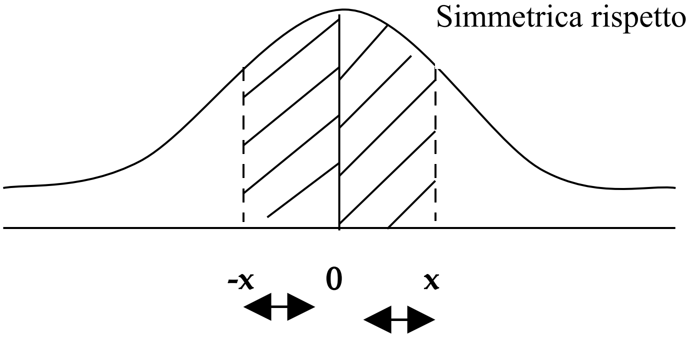
La nostra X~N, ma non è standardizzata, cioè: $P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{x-\mu}{\sigma}\right) = 0{,}90$

$P(Z < z) = 0{,}90 \quad z = 1{,}285 = (1{,}28 + 1{,}29)/2$

Se $z = \frac{x-\mu}{\sigma} = 1{,}285 \rightarrow \frac{x-2}{1} = 1{,}285 \rightarrow x = 2 + 1{,}285 = 3{,}285$

Esercizio n. 5

X~N(0;1). Trovare il valore della *x* tale che P(-x<X<x)=0, 5



P=0,25 P=0,25

La probabilità cumulata fino al valore x = P(X < x) = 0,75

Voglio trovare il valore di x tale che fino ad esso ho cumulato il 75% della Probabilità.

La nostra X~N ed è standardizzata, per cui:

$P(Z < z) = 0,75 \quad z = 0,675 = (0,67 + 0,68)/2$

z = 0,675 ➔ P(0,75) è il 3°Quartile.

Esercizio n 6

Il tempo impiegato da un commesso di un negozio per assistere i clienti si distribuisce come una variabile casuale esponenziale negativa. In media il commesso impiega 10 minuti per ogni cliente. Si vuole calcolare la probabilità che, per assistere un cliente, il commesso impieghi un tempo compreso tra 5 e 15 minuti. Il parametro λ è dato dal reciproco della media: λ = 1/10

$$X \sim Exp(1/10)$$

La funzione di riparizione di una variabile casuale esponenziale negativa è data da:

$$F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$$

Soluzione

$$P(5 \leq x \leq 15) = F(15) - F(5) = 1 - e^{-\frac{15}{10}} - \left[1 - e^{-\frac{5}{10}}\right] = e^{-\frac{1}{2}} - e^{-\frac{3}{2}} = 0,6065 - 0,2231 = 0,3835$$

Esercizio n 7

Un professore incontra regolarmente gli studenti durante l'orario di ricevimento. Il tempo trascorso con ciascuno studente si distribuisce come una v.c. esponenziale negativa con media 15 minuti. Determinare la probabilità che:

- uno studente trascorra con il professore meno di 20 minuti;
- uno studente trascorra con il professore più di 5 minuti;
- uno studente trascorra con il professore un tempo compreso tra 10 e 15 minuti.

Soluzione

X~Exp(λ)= X~Exp$\left(\frac{1}{15}\right)$

a) $P(X \leq 20) = 1 - e^{-\frac{20}{15}} = 0{,}7364$

b) $P(X \geq 5) = 1 - \left[1 - e^{-\frac{5}{15}}\right] = 1 - 0{,}2834 = 0{,}7166$

c) $P(10 \leq x \leq 15) = F(15) - F(10) = 1 - e^{-\frac{15}{15}} - \left[1 - e^{-\frac{10}{15}}\right] = e^{-0{,}67} - e^{-1} = 0{,}5117 - 0{,}3678 = 0{,}1439$

Esercizio n 8

Il numero di prelievi presso uno sportello bancario ha una distribuzione di Poisson. In media ogni ora vi sono 6 prelievi.

- qual è la probabilità che in 10 minuti non vi siano prelievi?
- Qual è il tempo medio che intercorre tra un prelievo ed il successivo?

Soluzione

Sia $X_t \sim P(t\lambda_1)$ la v.c. che descrive il numero di prelievi che si verificano in un intervallo di lunghezza t, dove λ_1 rappresenta il numero medio di prelievi in un intervallo di lunghezza unitario. Il tempo T, affinché si verifichi un evento, è maggiore di t se in un intervallo di lunghezza t non si verifica alcun evento. Di conseguenza la probabilità dell'evento T>t è data da:

$$P(T > t) = P(X_t = 0) = \frac{e^{-t\lambda_1}(t\lambda_1)^0}{0!} = e^{-t\lambda_1}$$

Di conseguenza il tempo T affinché si verifichi un prelievo ha una distribuzione esponenziale negativa con parametro λ_1.

$$T \sim Exp(\lambda_1)$$

t = 10

λ_1=1/10 (avendo 6 prelievi all'ora, in un minuto è come se avessimo 1/10 di prelievo).

Quindi la probabilità che in 10 minuti non vi siano prelievi è uguale a

$$P(X_t = 0) = e^{-t\lambda_1} = e^{-10*\frac{1}{10}} = e^{-1} = 0{,}3679$$

b) tempo medio tra un prelievo ed il successivo = E[X]= $\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\frac{1}{10}} = 10$ minuti

Esercizio n 9

Il numero di incidenti automobilistici che si verificano su un raccordo extraurbano ha una distribuzione di Poisson. Il numero medio di incidenti al mese è 1,8.

a) qual è la probabilità che passino 2 mesi prima che si verifichi un incidente?
b) Qual è il tempo medio che intercorre fra due incidenti?

Soluzione

$X \sim P(t\lambda_1)$; $T \sim Exp(\lambda_1)$

a) $1 - P(T > 2) = e^{-2*1{,}8} = 0{,}0273$

b) E[X] = $\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{1{,}8} = 0{,}56$ mesi