Esercitazione 5 del corso di Statistica (parte seconda)

Dott.ssa Paola Costantini

18 Febbraio 2009

Esercizio n 1

In un poligono di tiro la probabilità che ad una certa distanza un determinato individuo colpisca il bersaglio esattamente al centro è 0,25. Calcolare la probabilità che lo stesso individuo centri almeno 2 volte il bersaglio in 7 tentativi.

Svolgimento
n=7
p=0,25
1-p=0,75

X~Bin(n,p)

$$P(x \geq 2) = 1 - P(x < 2) = 1 - (P(x=0) \cup P(x=1))$$

$$P(x=0) \cup P(x=1) = \frac{7!}{0!(7!)} 0,25^0 0,75^7 + \frac{7!}{1!(6!)} 0,25^1 0,75^6 =$$

$$= (1*1*0,1335) + (7*0,25*0,1780) = 0,1335 + 0,3115 = 0,4450$$

$$P(x \geq 2) = 1 - 0,4450 = 0,5550$$

Esercizio n 2

All'aeroporto Shipol di Amsterdam atterrano cinque aerei ogni tre minuti:
- qual'è la probabilità che in un minuto non atterri nessun aereo?
- qual'è la probabilità che in un minuto atterrino almeno due aerei?
- qual'è la probabilità che in un minuto atterrino da uno a quattro aerei?

Svolgimento

La variabile casuale che esprime la probabilità del verificarsi di X eventi (di tipo discreto) in un dato intervallo 8continuo) di tempo è la v.c. di Poisson di parametro λ (intensità).
La v.c. di Poisson assume un unico parametro λ , che ne rappresenta sia il valore atteso che la varianza.

Formalmente

$$P(X = x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!}$$

Il parametro λ nel caso degli arrivi degli aerei ad Shipol è dato da λ = 5/3e corrisponde al numero di aerei che atterrano in media ogni minuto. E' dunque possibile determinare le probabilità richieste:

• qual``e la probabilità che in un minuto non atterri nessun aereo?

$$P(X = 0 \mid \frac{5}{3}) = \frac{e^{-\frac{5}{3}}\frac{5}{3}^{0}}{0!} = e^{-\frac{5}{3}} = 0.189$$

• qual'è la probabilità che in un minuto atterrino almeno due aerei?

$$P(X \geq 2 \mid \frac{5}{3}) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) = 1 - \frac{e^{-\frac{5}{3}}\frac{5}{3}^{0}}{0!} - \frac{e^{-\frac{5}{3}}\frac{5}{3}^{1}}{1!} =$$
$$= 1 - 0.189 - 0.315 = 0.496$$

• qual'è la probabilità che in un minuto atterrino da uno a 4 aerei?

$$P(1 \leq X \leq 4 \mid \frac{5}{3}) = P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4) =$$
$$\frac{e^{-\frac{5}{3}}\frac{5}{3}^{1}}{1!} + \frac{e^{-\frac{5}{3}}\frac{5}{3}^{2}}{2!} +$$
$$+ \frac{e^{-\frac{5}{3}}\frac{5}{3}^{3}}{3!} + \frac{e^{-\frac{5}{3}}\frac{5}{3}^{4}}{4!} =$$
$$= 0.315 + 0.262 + 0.146 + 0.061 = 0.784$$

Esercizio n 3

Il numero di studenti che si presentano presso la segreteria di un grande Ateneo ha una distribuzione di Poisson. In media si presentano 3 studenti al minuto,

a) Qual' è la probabilità che in un minuto arrivi almeno uno studente?
b) Qual' è la probabilità che in due minuti non arrivi alcuno studente?
c) Qual' è la probabilità che in tre minuti arrivino 15 studenti?
d) Qual' è il numero medio di studenti in un'ora?

Soluzione

Formalmente $P(X = x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!}$

a. $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) =$

$$P(X = 0) = \frac{e^{-3}3^{0}}{0!} = 0{,}0498 \Rightarrow 1 - 0{,}0498 = 0{,}9502$$

b. Se il numero di studenti che entrano in segreteria è pari a $\lambda_1 = E[X_1] = 3$, di conseguenza la v.c. che descrive il numero di studenti in 2 minuti è $X_2 \sim P(\lambda_2)$ dove $\lambda_2 = 2\lambda_1 = 6$

$$P(X = 0) = \frac{e^{-6}6^{0}}{0!} = 0{,}0025$$

c. $X_3 \sim P(\lambda_3)$ dove $\lambda_3 = 3\lambda_1 = 9$

$$P(X = 15) = \frac{e^{-9}9^{15}}{15!} = 0{,}0194$$

d. Se supponiamo λ = 3 studenti al minuto, allora in un'ora λ = 3*60=180 studenti.

Esercizio n 4

Il numero medio di chiamate che arrivano ad un centralino telefonico in un'ora è 300. Sapendo che il numero di chiamate che arrivano allo stesso centralino in un minuto segue una distribuzione di Poisson, calcolare la probabilità che in un minuto non arrivino più di 2 chiamate.

SOLUZIONE

La media della distribuzione del numero di chiamate che arrivano al centralino in un minuto è:

$$\lambda = \frac{300}{60} = 5$$

La probabilità richiesta è:

$$P(X \leq 2) = \sum_{x=0}^{2} \frac{\lambda^{x}}{x!} e^{(-\lambda)} = \frac{5^{0}}{0!} e^{(-5)} + \frac{5^{1}}{1!} e^{(-5)} + \frac{5^{2}}{2!} e^{(-5)} = 0{,}0067 + 0{,}0337 + 0{,}0842 = 0{,}1246$$

Esercizio n 5

Una fabbrica di cioccolato promuove una campagna pubblicitaria per la vendita di un nuovo tipo di uova pasquali, caratterizzate dal contenuto della sorpresa, costituita da bracciali di ottone. Su una partita di 1000uova, 3 di esse contengono un collier d'oro, del valore di 500 euro cadauno. Le uova contenenti collier d'oro, a loro volta, vengono inserite in modo casuale in scatole da 15, e vendute ai negozianti. Qual è la probabilità che un negoziante che acquista una scatola di uova, vende al pubblico 1 o più uova contenenti collier d'oro?

SOLUZIONE

Quando n $\rightarrow \infty$ la distribuzione di Poisson con parametro λ= np può servire come approssimazione alla legge binomiale di parametri n e p.

Quando n è elevato è complicato calcolare la probabilità dei valori x = 0, 1, 2, …, n di un modello Binomiale, che richiederebbe fattoriali e potenze di ordine elevato.

La risposta può essere ottenuta ricorrendo alla v.c. binomiale, i cui parametri sono n=15 e p= 3/1.000=0,003;

Siamo quindi di fronte ad una Binomiale con parametri

X ~Bin(15; 0,003)

$$P(X = x) = \binom{n}{x} p^x (1 - p)^{n-x} = \frac{n!}{x!(n-x)!} p^x (1-p)^{n-x}$$

$$P(X = 0) = \frac{15!}{0!15!} 0{,}003^0 (1 - 0{,}003)^{15-0} = 0{,}95593$$

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - f(0) = 1 - \binom{15}{0} 0{,}003^0 (1 - 0{,}003)^{15-0} = 0{,}044$$

Con p molto piccolo come in questo caso, possiamo trattarla come una v.c. di Poisson con parametro

X~Po(0,045)

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - f(0) = 1 - \frac{0{,}045^0}{0!} e^{(-0{,}045)} = 1 - 0{,}95599 = 0{,}044$$