Esercitazione 1 del corso di Statistica (parte 2)

Dott.ssa Paola Costantini

18 Gennaio 2012

Esercizio n1

Compro due cassette contenenti 10 piante di rosa che ancora devono sbocciare. Nella prima cassetta ci sono 7 piantine di rose rosse e 3 bianche, nella seconda ci sono 5 piantine di rose rosse e 5 bianche. Prendo una delle due cassette e da questa estraggo due paintine. Qual è la probabilità che sboccino tutte rose rosse?

Soluzione: (Teorema delle probabilità totali)
Si indichi con:
$1R_1$ = la prima piantina della prima cassetta è rossa
$1R_2$ = la seconda piantina della prima cassetta è rossa
$2R_1$ = la prima piantina della seconda cassetta è rossa
$2R_2$ = la seconda piantina della seconda cassetta è rossa

P(1) = probabilità di estrarre la prima cassetta = 0,5

La probabilità che la prima piantina estratta dalla prima cassetta sia rossa è:

$$\mathbf{P(R_1) = 7/10 = 0,7}$$

La probabilità che anche la seconda pallina estratta dalla prima cassetta sia rossa è condizionata dal verificarsi dell'evento $\mathbf{R_1}$:

$$\mathbf{P(R_1|R_2)} = 6/9 = 0,66$$

$$P(1R_1 \cap 1R_2) = P(1) * P(R_1) * P(R_2) = 0,5 * 0,7 * 0,66 = 0,231$$

P(2) = probabilità di estrarre la seconda cassetta = 0,5

La probabilità che la prima piantina estratta dalla prima cassetta sia rossa è:

$$\mathbf{P(R_2) = 5/10 = 0,5}$$

La probabilità che anche la seconda pallina estratta dalla prima cassetta sia rossa è condizionata dal verificarsi dell'evento $\mathbf{R_2}$:

$$\mathbf{P(R_1|R_2)} = 4/9 = 0,44$$

$$P(2R_1 \cap 2R_2) = P(2) * P(R_1) * P(R_2) = 0{,}5 * 0{,}5 * 0{,}44 = 0{,}11$$

$$P(R) = P(1R_1 \cap 1R_2) \cup P(2R_1 \cap 2R_2) = 0{,}231 + 0{,}11 = 0{,}341$$

Esercizio 2

Uno studente deve sostenere un esame. Se studia passa con probabilità 99 %, ma se va alla festa da ballo la sera prima la sua probabilità di promozione si riduce al 50 %. Deciderà di andare alla festa se esce testa lanciando una moneta equa. Se egli supera l'esame qual è la probabilità che sia andato a ballare?

Si considerino gli eventi:

- E = passa l'esame
- F = va alla festa

I dati che si hanno a disposizione sono:

P$(E|\overline{F})$ = 0,99

P($(E|F)$) = 0,50

P(F) = P($\overline{\text{F}}$) = 0,5

La probabilità richiesta dal problema si determina applicando il **Teorema di Bayes**, ovvero:

$$P(F|E) = \frac{P(F) \cdot P(E|F)}{P(F) \cdot P(E|F) + P(\overline{F})P(E|\overline{F})} = \frac{0{,}5 \cdot 0{,}5}{0{,}5 \cdot 0{,}5 + 0{,}5 \cdot 0{,}99} = 0{,}336$$

Esercizio n. 3

Supponiamo di avere un’urna contenente 12 palline, di cui 5 verdi, 3 blu e 4 rosse. Si consideri l’esperimento consistente nell’estrazione di tre palline dall’urna, costruire le variabili casuali:

X: n. di palline blu estratte (estrazione con ripetizione)

Y: n. di palline verdi estratte (estrazione con ripetizione)

Z: n. di palline blu estratte (estrazione senza ripetizione)

X: n. palline blu estratte (con ripetizione)

Spazio degli eventi	x_i	p_i	P_i
P($\overline{B_1} \cap \overline{B_2} \cap \overline{B_3}$)	0	0,4218	0,4218
P($B_1 \cap \overline{B_2} \cap \overline{B_3}$)	1	0,4218 (0,14*3)	0,8436
P($\overline{B_1} \cap B_2 \cap \overline{B_3}$)			
P($\overline{B_1} \cap \overline{B_2} \cap B_3$)			
P($\overline{B_1} \cap B_2 \cap B_3$)	2	0,14 (0,047*3)	0,9836
P($B_1 \cap \overline{B_2} \cap B_3$)			
P($B_1 \cap B_2 \cap \overline{B_3}$			
P($B_1 \cap B_2 \cap B_3$)	3	0,0157	1

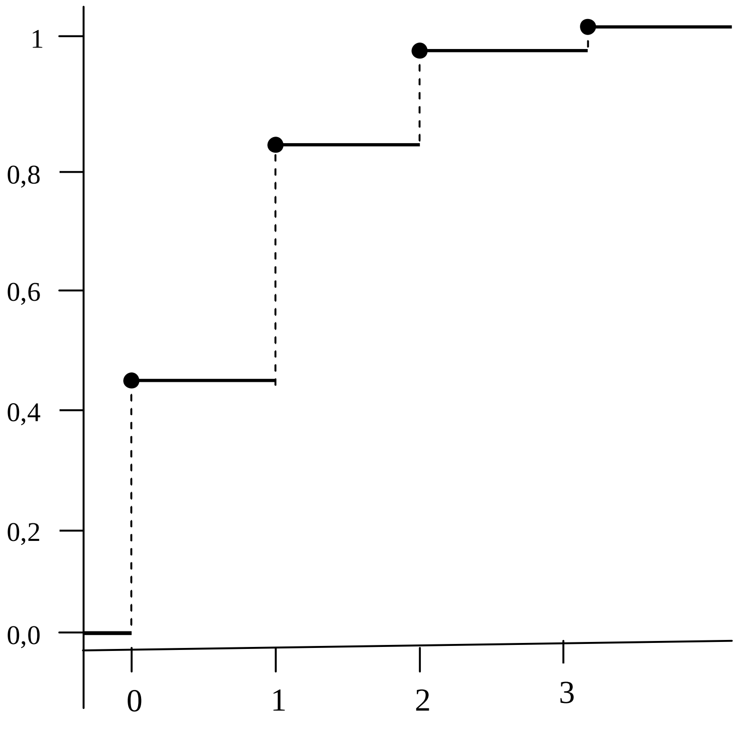
$$= \frac{9}{12} * \frac{9}{12} * \frac{9}{12} = 0{,}4218$$

$$= \frac{9}{12} * \frac{9}{12} * \frac{3}{12} = 0{,}1406$$

$$= \frac{9}{12} * \frac{3}{12} * \frac{3}{12} = 0{,}047$$

$$= \frac{3}{12} * \frac{3}{12} * \frac{3}{12} = 0{,}0157$$

Rappresentazione della *Funzione di ripartizione*



F(x)=0, per $x < 0$
F(x)=0,4218 per $0 \leq x \leq 1$
F(x)=0,8436 per $1 \leq x \leq 2$
F(x)=0,9836 per $2 \leq x \leq 3$
F(x)=1 per $x \geq 3$

Y: n. palline verdi estratte (con ripetizione)

Spazio degli eventi	x_i	p_i	P_i
P($\overline{V_1} \cap \overline{V_2} \cap \overline{V_3}$)	0	0,198	0,198
P($V_1 \cap \overline{V_2} \cap \overline{V_3}$)	1	0,425 (0,142*3)	0,623
P($\overline{V_1} \cap V_2 \cap \overline{V_3}$)			
P($\overline{V_1} \cap \overline{V_2} \cap V_3$)			
P($\overline{V_1} \cap V_2 \cap V_3$)	2	0,303 (0,101*3)	0,9263
P($V_1 \cap \overline{V_2} \cap V_3$)			
P($V_1 \cap V_2 \cap \overline{V_3}$			
P($V_1 \cap V_2 \cap V_3$)	3	0,072	1

$$= \frac{7}{12} * \frac{7}{12} * \frac{7}{12} = 0{,}198$$

$$= \frac{7}{12} * \frac{7}{12} * \frac{5}{12} = 0{,}1417$$

$$= \frac{7}{12} * \frac{5}{12} * \frac{5}{12} = 0{,}1012$$

$$= \frac{5}{12} * \frac{5}{12} * \frac{5}{12} = 0{,}0723$$

F(x)=0 per $x < 0$
F(x)=0,198 per $0 \leq x \leq 1$
F(x)=0,623 per $1 \leq x \leq 2$
F(x)=0,926 per $2 \leq x \leq 3$
F(x)=1 per $x \geq 3$

Z: n. palline blu estratte (senza ripetizione)

Spazio degli eventi	x_i	p_i	P_i
P($\overline{B_1} \cap \overline{B_2} \cap \overline{B_3}$)	0	0,3818	0,3818
P($B_1 \cap \overline{B_2} \cap \overline{B_3}$)	1	0,49 (0,163*3)	0,8718
P($\overline{B_1} \cap B_2 \cap \overline{B_3}$)			
P($\overline{B_1} \cap \overline{B_2} \cap B_3$)			
P($\overline{B_1} \cap B_2 \cap B_3$)	2	0,123 (0,041*3)	0,9946
P($B_1 \cap \overline{B_2} \cap B_3$)			
P($B_1 \cap B_2 \cap \overline{B_3}$			
P($B_1 \cap B_2 \cap B_3$)	3	0,0045	1

$$= \frac{9}{12} * \frac{8}{11} * \frac{7}{10} = 0{,}3818$$

$$= \frac{3}{12} * \frac{9}{11} * \frac{8}{10} = 0{,}1636$$

$$= \frac{9}{12} * \frac{3}{11} * \frac{2}{10} = 0{,}041$$

$$= \frac{3}{12} * \frac{2}{11} * \frac{1}{10} = 0{,}0157$$

F(x)=0 per $x < 0$
F(x)=0,3818 per $0 \leq x \leq 1$
F(x)=0,8718 per $1 \leq x \leq 2$
F(x)=0,9946 per $2 \leq x \leq 3$
F(x)=1 per $x \geq 3$

Esercizio n. 4

Lanciando tre monete, si consideri la v.c. descritta dal numero delle teste che si presentano in una prova.

Spazio degli eventi	xi	pi	Pi
CCC	0	1/8	1/8
CCC	1	3/8	4/8
CTC			
TCC			
TTC	2	3/8	7/8
TCT			
CTT			
TTT	3	1/8	1

Calcolare il valore atteso e la varianza di X.

Applicando la formula del valore atteso, abbiamo:

$$\mu = E[X] = \sum_i x_i p_i$$

$$E(X) = 0 \cdot \frac{1}{8} + 1 \cdot \frac{3}{8} + 2 \cdot \frac{3}{8} + 3 \cdot \frac{1}{8} = 1{,}5$$

per cui in una prova il numero atteso di "teste" è pari a 1,5.

$$Var(X) = \sigma^2 = \sum_i (x_i - \mu)^2 p_i$$

$$(0-1{,}5)^2 \cdot 0{,}125 + (1-1{,}5)^2 \cdot 0{,}375 + (2-1{,}5)^2 \cdot 0{,}375 + (3-1{,}5)^2 \cdot 0{,}125 = 0{,}75$$

Solitamente σ risulta un indice di variabilità più conveniente da utilizzare perché è espresso nella stessa unità di X.

$$\sigma = \sqrt{\sigma_2} = \sqrt{0{,}75} = 0{,}866$$

Il numero di "teste" che si presenta in ciascun lancio è diverso da quello atteso (1,5) mediamente per 0,866 teste.

Esercizio n. 5

In un poligono di tiro la probabilità che ad una certa distanza un determinato individuo colpisca il bersaglio esattamente al centro è 0,25. Calcolare la probabilità che lo stesso individuo centri almeno 2 volte il bersaglio in 7 tentativi.

Svolgimento

n=7

π=0,25

$1-\pi$ =0,75 X~Bin(n, π)

Soluzione

$$P(x \geq 2) = 1 - P(x < 2) = 1 - (P(x = 0) \cup P(x = 1))$$

$$P(x = 0) \cup P(x = 1) = \frac{7!}{0!(7!)} 0,25^0 0,75^7 + \frac{7!}{1!(6!)} 0,25^1 0,75^6 =$$

$$= (1 * 1 * 0,1335) + (7 * 0,25 * 0,1780) = 0,1335 + 0,3115 = 0,4450$$

$$P(x \geq 2) = 1 - 0,4450 = 0,5550$$

Esercizio n. 6

Un venditore di elettrodomestici a domicilio sa che in ogni visita la probabilità che riesca a convincere il cliente ad acquistare un elettrodomestico è 0,35. L'esito di ogni visita è indipendente da quello delle altre. Il venditore ha programmato 5 visite; si vuole calcolare la distribuzione di probabilità del numero di elettrodomestici che riesce a vendere. Sia X la v.c. che descrive questo esperimento, abbiamo che X ha una distribuzione binomiale con n=5 e p=0,35 cioè:

X~Bin(5;0,35)

La funzione di probabilità è data da:

$$P(X = x) = \binom{n}{x} \pi^x (1 - \pi)^{n-x} = \frac{n!}{x!(n-x)!} \pi^x (1 - \pi)^{n-x}$$

Da cui

$$P(X = 0) = \frac{5!}{0!5!} 0,35^0 (1 - 0,35)^5 = 0,116$$

$$P(X = 1) = \frac{5!}{1!4!} 0,35^1 (1 - 0,35)^4 = 0,312$$

$$P(X = 2) = \frac{5!}{2!3!} 0,35^2 (1 - 0,35)^3 = 0,337$$

$$P(X = 3) = \frac{5!}{3!2!} 0,35^3 (1 - 0,35)^2 = 0,181$$

$$P(X = 4) = \frac{5!}{4!1!} 0,35^4 (1 - 0,35)^1 = 0,049$$

$$P(X = 5) = \frac{5!}{5!0!} 0{,}35^5 (1 - 0{,}35)^0 = 0{,}005$$

Si vuole inoltre calcolare in media quanti elettrodomestici il venditore si aspetta di vendere.

Il valore atteso di una variabile Binomiale è dato da: E[X] = n* π, per cui nel nostro caso abbiamo:

$$E[X] = 5*0{,}35=1{,}75$$

Infine si vuole calcolare la probabilità che il venditore venda almeno un elettrodomestico.
Per calcolare la probabilità dell'evento $P(X\geq1)$=si osservi che $P(X=0)$ è la sua negazione. Il modo più rapido per calcolare la probabilità desiderata è:

$P(X\geq1)= 1-P(X=0)$

Sapendo che $P(X=0)=0{,}116$ di conseguenza abbiamo che $P(X\geq1)= 1-0{,}116=0{,}884$

Esercizio n. 7

Una società di esplorazione di gas naturale scopre in media 4 giacimenti di gas per ogni 100 trivellazioni eseguite. L'esito di ciascuna trivellazione è indipendente dalle altre. Si eseguono 20 trivellazioni:

a. Qual è la probabilità che si scopre un giacimento?
b. Qual è la probabilità che si scopra al massimo un giacimento?
c. Qual è la probabilità che si scoprano almeno due giacimenti?
d. Quali sono il numero medio e la varianza di giacimenti scoperti in 20 trivellazioni?

Soluzione

In questo caso abbiamo che n=20 e π =4/100=0,04

a. $P(X=1)=\frac{20!}{1!19!} * 0{,}04^1 (1-0{,}04)^{19} = 20 \times 0{,}04(0{,}96)^{19} = 0{,}368$

b. Probabilità che si scopra al massimo un giacimento = $P(X=0)+ P(X=1)$

da cui $P(X=0) = \frac{20!}{0!20!} * 0{,}04^0 (1-0{,}04)^{20} = 0{,}44$

e sapendo che $P(X=1) = 0{,}368$ abbiamo che $P(X=0)+ P(X=1) = 0{,}44+0{,}368=0{,}810$

c. Almeno due giacimenti = $P(X \geq 2) = 1 - P(X=0)+ P(X=1) = 1-0{,}810 = 0{,}19$

d. Valore atteso E[X]= n* π = 20*0,04= 0,80 Var(X)=n* π (1- π) = 20*0,04(0,96) = 1,1375 per cui per ogni 4 trivellazioni ci si attende di scoprire 0,80 giacimenti, con un a varianza di 1,1375.

Esercizio n. 8

All'aeroporto Shipol di Amsterdam atterrano cinque aerei ogni tre minuti:
- qual'è la probabilità che in un minuto non atterri nessun aereo?
- qual'è la probabilità che in un minuto atterrino almeno due aerei?
- qual'è la probabilità che in un minuto atterrino da uno a quattro aerei?

Soluzione

La variabile casuale che esprime la probabilità del verificarsi di X eventi (di tipo discreto) in un dato intervallo (continuo) di tempo è la v.c. di Poisson di parametro λ (intensità).
La v.c. di Poisson assume un unico parametro λ , che ne rappresenta sia il valore atteso che la varianza.
Formalmente

$$P(X = x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}$$

Il parametro λ nel caso degli arrivi degli aerei ad Shipol è dato da λ = 5/3e corrisponde al numero di aerei che atterrano in media ogni minuto. E' dunque possibile determinare le probabilità richieste:

- qual'`e la probabilità che in un minuto non atterri nessun aereo?

$$P(X = 0 \mid \frac{5}{3}) = \frac{e^{-\frac{5}{3}}\frac{5}{3}^0}{0!} = e^{-\frac{5}{3}} = 0.189$$

- qual'è la probabilità che in un minuto atterrino almeno due aerei?

$$P(X \geq 2 \mid \frac{5}{3}) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) = 1 - \frac{e^{-\frac{5}{3}}\frac{5}{3}^0}{0!} - \frac{e^{-\frac{5}{3}}\frac{5}{3}^1}{1!} =$$
$$= 1 - 0.189 - 0.315 = 0.496$$

- qual'è la probabilità che in un minuto atterrino da uno a 4 aerei?

$$P(1 \leq X \leq 4 \mid \frac{5}{3}) = P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4) =$$
$$\frac{e^{-\frac{5}{3}}\frac{5}{3}^1}{1!} + \frac{e^{-\frac{5}{3}}\frac{5}{3}^2}{2!} +$$
$$+ \frac{e^{-\frac{5}{3}}\frac{5}{3}^3}{3!} + \frac{e^{-\frac{5}{3}}\frac{5}{3}^4}{4!} =$$
$$= 0.315 + 0.262 + 0.146 + 0.061 = 0.784$$

Esercizio n. 9

Il numero medio di chiamate che arrivano ad un centralino telefonico in un'ora è 300. Sapendo che il numero di chiamate che arrivano allo stesso centralino in un minuto segue una distribuzione di Poisson, calcolare la probabilità che in un minuto non arrivino più di 2 chiamate.

SOLUZIONE
La media della distribuzione del numero di chiamate che arrivano al centralino in un minuto è:

$$\lambda = \frac{300}{60} = 5$$

La probabilità richiesta è:

$$P(X \le 2) = \sum_{x=0}^{2} \frac{\lambda^x}{x!} e^{(-\lambda)} = \frac{5^0}{0!} e^{(-5)} + \frac{5^1}{1!} e^{(-5)} + \frac{5^2}{2!} e^{(-5)} = 0{,}0067 + 0{,}0337 + 0{,}0842 = 0{,}1246$$

Esercizio n. 10

Un'azienda produttrice di automobili offre ai suoi clienti un servizio di soccorso stradale. La probabilità che in un'ora vi sia una richiesta di aiuto è 0,33. Le richieste di soccorso sono tra di loro indipendenti.

a. Qual è la probabilità che la prima richiesta di soccorso si verifichi nella seconda ora?
b. Qual è la probabilità che la prima richiesta di soccorso si verifichi dopo la prima ora?
c. Qual è il numero medio di ore necessarie affinché vi sia la prima richiesta di soccorso?

Soluzione

In questo caso X~G(0,33)

La funzione di probabilità della v.c. geometrica X è data da:

$$P(X = x) = (1-\pi)^{x-1}\pi$$

a. $P(X=2) = (1-0{,}33)^{(2-1)} * 0{,}33 = 0{,}221$
b. $P(X \geq 1) = 1 - P(X=1) \rightarrow P(X=1) = (1-0{,}33)^{(1-1)} * 0{,}33 = 0{,}33$
Per cui $P(X \geq 1) = 1 - 0{,}33 = 0{,}67$

c. Il valore atteso di una v.c. geometrica è pari a $E[X] = \frac{1}{\pi} = \frac{1}{0{,}33} = 3{,}030$