Esercitazione 1 del corso di Statistica (parte 2)

Dott.ssa Paola Costantini

15 Aprile 2009

Esercizio 1

Considerando gli eventi elemenatri associati alla seguente distribuzione doppia:

Corso laurea \ Attività sportiva	Nulla (N)	Media (M)	Alta (A)	**Totale**
Biologia (B)	0	1	0	**1**
Informatica (I)	4	7	1	**12**
Matematica (Mat)	2	5	0	**7**
Totale	**6**	**13**	**1**	**20**

determinare:

a) le probabilità elementari

Inoltre si determinino le probabilità che, scegliendo uno studente a caso:

b) sia iscritto in matematica e pratichi attività sportiva media;
c) sia iscritto in biologia e pratichi attività sportiva alta;
d) sia iscritto in informatica o pratichi attività sportiva nulla;
e) essendo iscritto in informatica, pratichi attività sportiva nulla;
f) praticando attività sportiva media, sia iscritto in biologia.

Soluzione

.a)
gli eventi elementari sono riferiti in entrambi gli spazi alla selezione casuale di uno dei 20 studenti.

Gli eventi elementari dello spazio Ω_1 sono:

B = “studente iscritto al CDL in biologia”
I = “studente iscritto al CDLin informatica”
Mat = “studente iscritto al CDL in matematica”

Gli eventi elementari dello spazio Ω_2 sono:

N = “attività sportiva nulla”
M = “attività sportiva media”
A = “attività sportiva alta”

Le probabilità elementari si ottengono come frequenze relative marginali della tabella.

$$P(B) = \frac{1}{20} = 0,05 \qquad P(N) = \frac{6}{20} = 0,3$$
$$P(I) = \frac{12}{20} = 0,6 \qquad P(M) = \frac{13}{20} = 0,65$$
$$P(Mat) = \frac{7}{20} = 0,35 \qquad P(Mat) = \frac{1}{20} = 0,05$$

Naturalmente la somma delle probabilità in ciascuno dei due spazi campionari è pari ad 1:

$$\begin{aligned}\sum_i P(E_i) &= 0,05 + 0,6 + 0,35 = \\ &= 0,3 + 0,65 + 0,05 = \\ &= 1\end{aligned}$$

b) sia "iscritto in matematica" *e* "pratichi attività sportiva media"

Si tratta della probabilità dell'intersezione dei due eventi:

$$P(Mat \cap M) = \frac{5}{20} = 0,25$$

c) sia "iscritto in biologia" *e* "pratichi attività sportiva alta"

Si tratta della probabilità dell'intersezione dei due eventi:

$$P(B \cap A) = \frac{0}{20} = 0$$

d) sia "iscritto in informatica" *o* "pratichi attività sportiva nulla"

Si tratta della probabilità dell'unione dei due eventi:

$$P(I \cup N) = P(I) + P(N) - P(I \cap N) = \frac{12}{20} + \frac{6}{20} - \frac{4}{20} = \frac{14}{20} = 0,7$$

e) *essendo iscritto in informatica*, pratichi attività sportiva nulla:

Si tratta di una probabilità condizionata, dove l'iscrizione in informatica è l'evento condizionante, quindi lo spazio campione di riferimento si riduce a quello costituito dai soli studenti iscritti in informatica.

$$P(N \mid I) = \frac{P(N \cap I)}{P(I)} = \frac{4/20}{12/20} = \frac{4}{12} = 0,\overline{3}$$

f) *praticando attività sportiva media*, sia iscritto in biologia:

Si tratta di una probabilità condizionata, dove il praticare attività sportiva media è l'evento condizionante, quindi lo spazio campione di riferimento si riduce a quello costituito dai soli che praticano attività sportiva media.

$$P(B \mid M) = \frac{P(B \cap M)}{P(M)} = \frac{1/20}{13/20} = \frac{1}{13} = 0,769$$

Esercizio 2

La tabella mostra la distribuzione dei giudizi espressi da 100 soggetti su una rete televisiva:

X=Giudizio / **Y=Età**	**1 |- 3**	**3 |- 5**	**5 |- 8**	**8 |-| 10**	**Totale**
Bambini, 5|-15 anni	2	0	1	8	**11**
Giovani, 15|-25 anni	4	3	2	15	**24**
Adulti, 25|-65 anni	10	11	4	8	**33**
Anziani, 65|-85 anni	24	6	1	1	**32**
Totale	**40**	**20**	**8**	**32**	**100**

Qual è la probabilità che estraendo a caso un individuo dalla tabella dell'esercizio 1 risulti:
- un adulto oppure esprima un punteggio compreso tra 3 ed 8?
- un giovane ed esprima un giudizio inferiore ad 8?
- Sapendo che un intervistato ha dato un voto tra 5 ed 8, qual è la probabilità che sia un anziano?

DEFINIAMO GLI EVENTI

a) Adulto = A
b) Giovane = G
c) Anziano = AN
d) Voto compreso tra 3 e 8 = [3-8]
e) Voto compreso tra 5 e 8 = [5-8]
f) Voto inferiore ad 8 = <8

Soluzione

1) $P(A \cup [3-8]) = P(A) + P([3-8]) - P(A \cap [3-8]) = \frac{33}{100} + \frac{60}{100} - \frac{23}{100} = 0,7$

2) $P(G \cap (<8)) = \frac{4}{100} + \frac{3}{100} + \frac{2}{100} = \frac{9}{100} = 0,09$

3) $P([5-8]AN) = \frac{P([5-8] \cap AN)}{P(AN)} = \frac{1/100}{32/100} = \frac{1}{32} = 0{,}03$

Esercizio 3

Un' urna contiene 7 palline con impresso il numero 1, 2 palline su cui è impresso il numero 2, 4 palline su cui è impresso il numero 3, 2 palline su cui è impresso il numero 4.

Costruire e rappresentare graficamente la variabile casuale X^3, dove X=numero impresso.

X	P(X)	X^3	$P(X^3)$
$X_{(7)} = 1$	$7/15 = 0{,}47$	$X_{(7)} = 1$	$7/15 = 0{,}47$
$X_{(2)} = 2$	$2/15 = 0{,}13$	$X_{(2)} = 8$	$2/15 = 0{,}13$
$X_{(4)} = 3$	$4/15 = 0{,}27$	$X_{(4)} = 27$	$4/15 = 0{,}27$
$X_{(2)} = 4$	$2/15 = 0{,}13$	$X_{(2)} = 64$	$2/15 = 0{,}13$

Esercizio 4

Il tempo di attesa ad uno sportello bancomat si distribuisce normalmente come media 1 e scarto quadratico medio 2.

Qual è la probabilità che un servizio richieda:

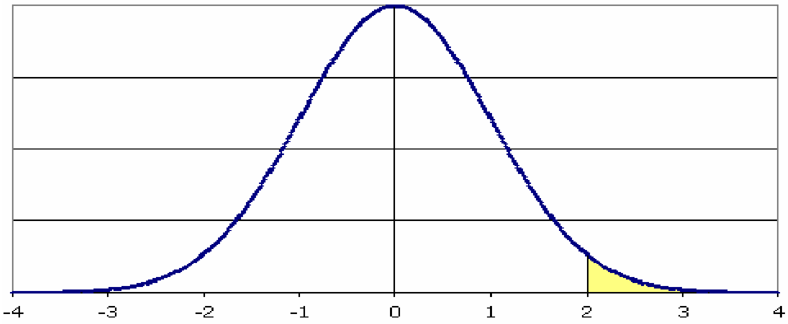
a) più di 5 minuti
b) meno di 2 minuti
c) fra i 3 e i 6 minuti
d) al massimo 3 minuti?

Soluzione

X ~ N(1; 4)
$\sigma = 2$

a)

$P(X > 5) = P\left(Z > \frac{5-1}{2}\right) = P(Z > 2)$

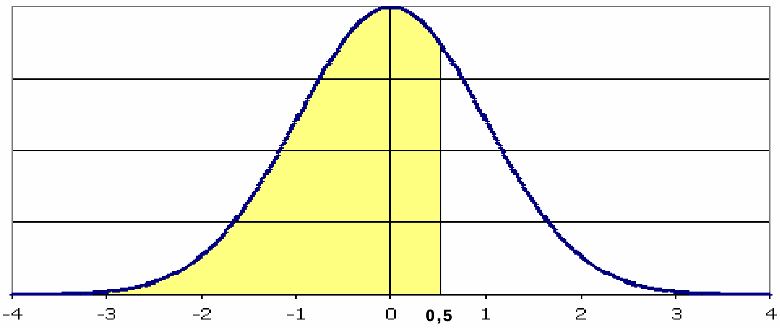


z	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	...	...
...	...	...	...	...	...	...	...	...
1,8	0,4641	0,4649	0,4656	0,4664	0,4671	0,4678	...	...
1,9	0,4713	0,4719	0,4726	0,4732	0,4738	0,4744	...	...
2,0	0,4772	0,4778	0,4783	0,4788	0,4793	0,4798	...	...
2,1	0,4821	0,4826	0,4830	0,4834	0,4838	0,4842	...	...
2,2	0,4861	0,4864	0,4868	0,4871	0,4875	0,4878	...	...
...	...	...	...	...	...	...	...	...

$P(Z>2)=0,5-P(z\le 2)=0,5-0,4772=$**0,1228**

b)

$$P(X\le 2)\ =\ P\left(Z\le\frac{2-1}{2}\right)=P(Z\le 0,5)$$

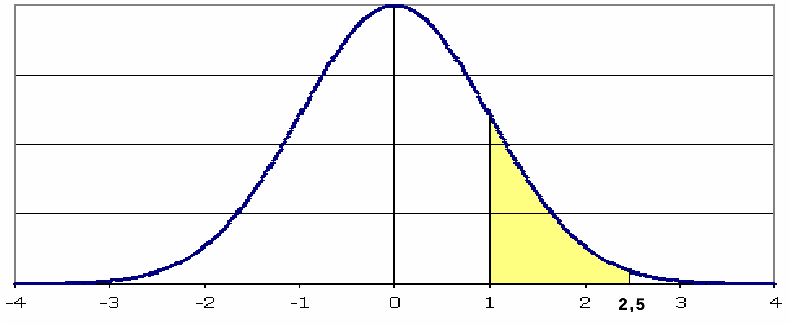


z	0	0,01	0,02	0,03	0,04	...	...
0,0	0,0000	0,0040	0,0080	0,0120	0,0160	...	...
0,1	0,0398	0,0438	0,0478	0,0517	0,0557	...	...
0,2	0,0793	0,0832	0,0871	0,0910	0,0948	...	...
0,3	0,1179	0,1217	0,1255	0,1293	0,1331	...	...
0,4	0,1554	0,1591	0,1628	0,1664	0,1700	...	...
0,5	0,1915	0,1950	0,1985	0,2019	0,2054	...	...
0,6	0,2257	0,2291	0,2324	0,2357	0,2389	...	...
0,7	0,2580	0,2611	0,2642	0,2673	0,2704	...	...
...	...	...	...	...	...	...	...

$P(Z\le 0,5)=0,5+0,1915=$**0,6915**

c)

$$P(3 \le X \le 6) \;=\; P\left(\frac{3-1}{2} \le Z \le \frac{6-1}{2}\right) = P\left(1 \le Z \le 2,5\right)$$

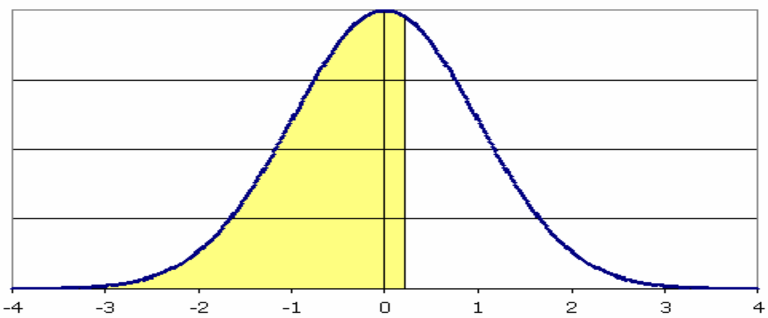


z	0	0,01	0,02	0,03	0,04	...
...	...	...	...	...	...	...
0,8	0,2881	0,2910	0,2939	0,2967	0,2995	...
0,9	0,3159	0,3186	0,3212	0,3238	0,3264	...
1,0	0,3413	0,3438	0,3461	0,3485	0,3508	...
1,1	0,3643	0,3665	0,3686	0,3708	0,3729	...
1,2	0,3849	0,3869	0,3888	0,3907	0,3925	...
...	...	...	...	...	...	...
2,3	0,4893	0,4896	0,4898	0,4901	0,4904	...
2,4	0,4918	0,4920	0,4922	0,4925	0,4927	...
2,5	0,4938	0,4940	0,4941	0,4943	0,4945	...
2,6	0,4953	0,4955	0,4956	0,4957	0,4959	...
2,7	0,4965	0,4966	0,4967	0,4968	0,4969	...
...	...	...	...	...	...	...

$$P\left(1 \le Z \le 2,5\right) = P\left(0 \le Z \le 2,5\right) - P\left(0 \le Z \le 1\right) =$$
$$= 0,4938 - 0,3413 = \mathbf{0,1525}$$

d)

$$P(X \le 3) \;=\; P\left(Z \le \frac{0,5-1}{2}\right) = P\left(Z \le -0,25\right)$$



z		0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	
0,0	...	0,0120	0,0160	0,0199	0,0239	0,0279	...
0,1	...	0,0517	0,0557	0,0596	0,0636	0,0675	...
0,2	...	0,0910	0,0948	0,0987	0,1026	0,1064	...
0,3	...	0,1293	0,1331	0,1368	0,1406	0,1443	...
0,4	...	0,1664	0,1700	0,1736	0,1772	0,1808	...
0,5	...	0,2019	0,2054	0,25	0,2123	0,2157	...
...	...	...	...	...	...	...	...

$P\left(Z \leq -0,25\right) = 0,5 + P\left(0 \leq Z \leq 0,25\right) = 0,5 + 0,0987 = \mathbf{0,5987}$

Esercizio 7

Supposto che il tempo di durata di un macchinario segua una distruzione normale con media pari a 400 settimane e varianza pari a 900 settimane calcolare:

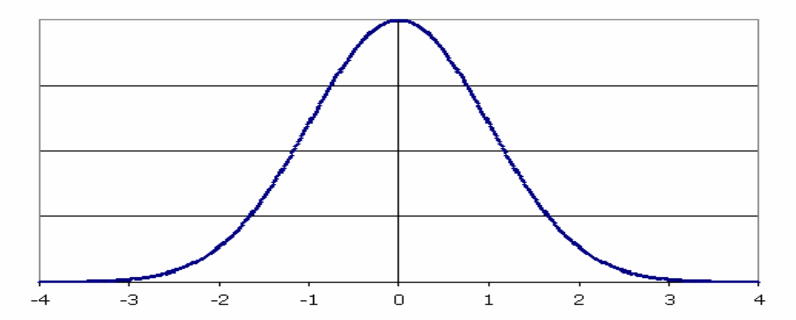
a) la probabilità che duri più di 490 settimane
b) la probabilità che duri tra le 340 e le 460 settimane
c) determinare la durata in settimane al di sopra della quale si trova il 10% dei macchinari

Soluzione

$X \sim N\ (400;\ 900)$
$\sigma = 30$

a)

$$P(X > 490) = P\left(Z > \frac{490 - 400}{30}\right) = P\left(Z > 3\right)$$

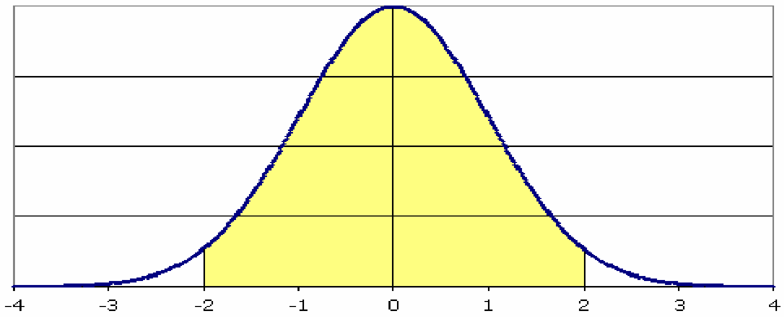


z	0	0,01	0,02	0,03	0,04	...
...	...	...	...	...	...	...
2,8	0,4974	0,4975	0,4976	0,4977	0,4977	...
2,9	0,4981	0,4982	0,4982	0,4983	0,4984	...
3,0	0,4987	0,4987	0,4987	0,4988	0,4988	...
3,1	0,4990	0,4991	0,4991	0,4991	0,4992	...
3,2	0,4993	0,4993	0,4994	0,4994	0,4994	...
...	...	...	...	...	...	...

$P(Z > 3) = 0,5 - P(0 \leq Z \leq 3) = 0,5 - 0,4987 =$ **0,013**

b)

$$P(340 \leq X \leq 460) = P\left(\frac{340-400}{30} \leq Z \leq \frac{460-400}{30}\right) = P(-2 \leq Z \leq 2) =$$



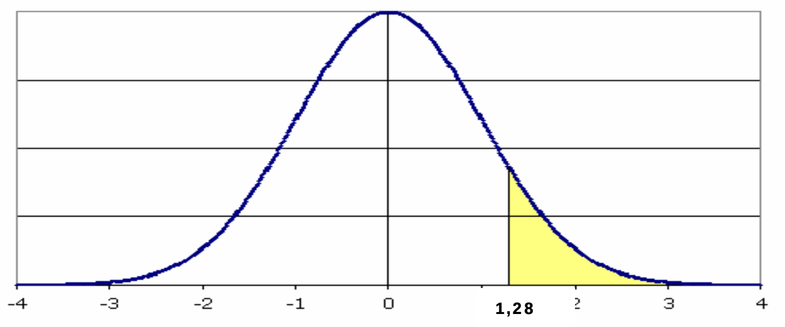
z	0	0,01	0,02	0,03	0,04	...
...	...	...	...	...	...	...
1,8	0,4641	0,4649	0,4656	0,4664	0,4671	...
1,9	0,4713	0,4719	0,4726	0,4732	0,4738	...
2,0	0,4772	0,4778	0,4783	0,4788	0,4793	...
2,1	0,4821	0,4826	0,4830	0,4834	0,4838	...
2,2	0,4861	0,4864	0,4868	0,4871	0,4875	...
...	...	...	...	...	...	...

$P(-2 \leq Z \leq 2) = 2 \times 0,4772 = 0,9544$

c)

$z_{0,9} = z^* : (P(Z > z^*) = 0,1) =$
$= z^* : (P(Z \leq z^*) = 0,9) =$
$= z^* : (P(0 \leq Z \leq z^*) = 0,4 =$
$= 1,28$

z	...	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
...	...	...	...	...	...	...	...
1,0	...	0,3508	0,3531	0,3554	0,3577	0,3599	0,3621
1,1	...	0,3729	0,3749	0,3770	0,3790	0,3810	0,3830
1,2	...	0,3925	0,3944	0,3962	0,3980	0,3997	0,4015
1,3	...	0,4099	0,4115	0,4131	0,4147	0,4162	0,4177
1,4	...	0,4251	0,4265	0,4279	0,4292	0,4306	0,4319
...	...	...	...	...	...	...	...



$x_{0,9} = z_{0,9} \cdot \sigma + \mu = 1{,}28 \times 30 + 400 = 438{,}4$