Esercitazione 4 del corso di Statistica (parte 2)

Dott.ssa Paola Costantini

15 Febbraio 2012

Esercizio n. 1

Il tempo di percorrenza del treno che collega la stazione di Roma Termini con l'aeroporto di Fiumicino è di 30 minuti esatti. Il percorso è lungo 30 km. e la velocità di percorrenza è costante durante tutta la tratta.
a) Si è interessati a valutare la probabilità che il treno interrompa la corsa tra il 15-mo km. ed il 19-mo km. per un guasto improvviso. Quanto vale tale probabilità?
b) Calcolare il valore atteso e la varianza della distribuzione di riferimento.

a) Poiché la velocità di percorrenza del treno è costante è lecito attendersi che la probabilità che il treno interrompa improvvisamente la corsa per un guasto improvviso è costante durante tutta la tratta di percorrenza, e quindi pari ad 1/30. La variabile casuale di riferimento X "il treno arresta la sua corsa all'i-mo km. per un guasto improvviso" è quindi la uniforme discreta.

Dal 15-mo al 19-mo chilometro il treno percorre 5 dei 30 km. di percorrenza totale. La probabilità richiesta è pertanto:

$$P(15 \le X \le 19) = P\left[(X=15)\cup(X=16)\cup(X=17)\cup(X=18)\cup(X=19)\right] = 1/30 \cdot 5 = 0.17$$

b) Calcolare il valore atteso e la varianza della distribuzione di riferimento.

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \frac{1}{n} = \frac{n+1}{2} = \frac{30+1}{2} = 15.5$$

$$Var(X) = \sum_{i=1}^{n} \left(x_i - E(X)\right)^2 \frac{1}{n} = \frac{n^2-1}{12} = \frac{30^2-1}{12} = 75.08$$

Esercizio n 2

Il numero di studenti che si presentano presso la segreteria di un grande Ateneo ha una distribuzione di Poisson. In media si presentano 3 studenti al minuto,

a) Qual' è la probabilità che in un minuto arrivi almeno uno studente?
b) Qual' è la probabilità che in due minuti non arrivi alcuno studente?
c) Qual' è la probabilità che in tre minuti arrivino 15 studenti?

d) Qual' è iol numero medio di studenti in un'ora?

Soluzione

Formalmente $P(X=x)=\dfrac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!}$

a. $P(X \geq 1)=1-P(X=0)=$

$$P(X=0)=\frac{e^{-3}3^{0}}{0!}=0{,}0498 \Rightarrow 1-0{,}0498=0{,}9502$$

b. Se il numero di studenti che entrano in segreteria è pari a $\lambda_1 = E[X_1]=3$, di conseguenza la v.c. che descrive il numero di studenti in 2 minuti è $X_2 \sim P(\lambda_2)$ dove $\lambda_2 = 2\lambda_1 = 6$

$$P(X=0)=\frac{e^{-6}6^{0}}{0!}=0{,}0025$$

c. $X_3 \sim P(\lambda_3)$ dove $\lambda_3 = 3\lambda_1 = 9$

$$P(X=15)=\frac{e^{-9}9^{15}}{15!}=0{,}0194$$

d. Se supponiamo λ = 3 studenti al minuto, allora in un'ora λ = 3*60=180 studenti.

Esercizio n 3

Una fabbrica di cioccolato promuove una campagna pubblicitaria per la vendita di un nuovo tipo di uova pasquali, caratterizzate dal contenuto della sorpresa, costituita da bracciali di ottone. Su una partita di 1000 uova, 3 di esse contengono un collier d'oro, del valore di 500 euro cadauno. Le uova contenenti collier d'oro, a loro volta, vengono inserite in modo casuale in scatole da 15, e vendute ai negozianti. Qual è la probabilità che un negoziante che acquista una scatola di uova, vende al pubblico 1 o più uova contenenti collier d'oro?

SOLUZIONE

Quando n → ∞ la distribuzione di Poisson con parametro λ= np può servire come approssimazione alla legge binomiale di parametri n e p.

Quando n è elevato è complicato calcolare la probabilità dei valori x = 0, 1, 2, …, n di un modello Binomiale, che richiederebbe fattoriali e potenze di ordine elevato.

La risposta può essere ottenuta ricorrendo alla v.c. binomiale, i cui parametri sono n=15 e p= 3/1.000=0,003;

Siamo quindi di fronte ad una Binomiale con parametri

X ~Bin(15; 0,003)

$$P(X = x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} = \frac{n!}{x!(n-x)!} p^x (1-p)^{n-x}$$

$$P(X = 0) = \frac{15!}{0!15!} 0{,}003^0 (1-0{,}003)^{15-0} = 0{,}95593$$

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - f(0) = 1 - \binom{15}{0} 0{,}003^0 (1-0{,}003)^{15-0} = 0{,}044$$

Con p molto piccolo come in questo caso, possiamo trattarla come una v.c. di Poisson con parametro

X~Po(0,045)

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - f(0) = 1 - \frac{0{,}045^0}{0!} e^{(-0{,}045)} = 1 - 0{,}95599 = 0{,}044$$

Esercizio 4

Si consideri una popolazione caratterizzata dai numeri 2, 3, 6, 8, 11. Si considerino tutti i possibili campioni di ampiezza N = 2, estratti senza ripetizione.

- Calcolare media e scarto quadratico medio della popolazione.
- Calcolare media della distribuzione della media campionaria.
- Calcolare l'errore standard della media campionaria.

Svolgimento

Bisogna in primo luogo elencare tutti i possibili campioni di ampiezza 2 che `e possibile estrarre senza ripetizione da una popolazione di 5 elementi. Ricordando le regole del conteggio, il numero di possibili campioni estraibili `e 52 = 25. In particolare

(2,2)	(2,3	(2,6)	(2,8)	(2,11)
(3,2)	(3,3)	(3,6)	(3,8)	(3,11)
(6,2)	(6,3)	(6,6)	(6,8)	(6,11)
(8,2)	(8,3)	(8,6)	(8,8)	(8,11)
(11,2)	(11,3)	(11,6)	(11,8)	(11,11)

2	2,5	4	5	6,5
2,5	3	4,5	5,5	7
4	4,5	6	7	8,5
5	5,5	7	8	9,5
6,5	7	8,5	9,5	11

Calcolando la media per ciascun campione si ottiene la distribuzione della media campionaria.

• Calcolare media e scarto quadratico medio della popolazione.

Calcoliamo i parametri della popolazione:

$$\mu = \frac{2+3+6+8+11}{5} = \frac{30}{5} = 6$$

$$\sigma^2 = \frac{(2-6)^2 + (3-6)^2 + (6-6)^2 + (8-6)^2 + (11-6)^2}{5} = \frac{54}{5} = 10{,}8$$

• Calcolare media della distribuzione della media campionaria.

Per ottenere la media della distribuzione media campionaria si effettua la media delle medie campionarie calcolate in precedenza.

$$\mu_{\bar{x}} = \frac{2+2{,}5+4+\ldots+9{,}5+11}{25} = \frac{150}{25} = 6$$

Si nota dunque che la media della distribuzione della media campionaria coincide con la media della popolazione, ovvero $\mu = \mu_{\bar{x}} = 6$

• Calcolare l'errore standard della media.

L'errore standard della media campionaria $\sigma_{\bar{x}}$ si ottiene analogamente

$$\sigma_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{(2-6)^2 + (3-6)^2 + (6-6)^2 + (8-6)^2 + (11-6)^2}{5}} = \sqrt{\frac{135}{25}} = \sqrt{5{,}4} = 2{,}32$$

Il che conferma la relazione tra la varianza della popolazione e la varianza della distribuzione della media campionaria $\sigma_{\bar{x}}^2 = \frac{\sigma}{N}$: infatti, essendo N = 2, taglia del campione, risulta essere $\frac{\sigma}{N} = \frac{10.8}{2} = 5{,}4$ che coincide con la varianza della distribuzione della media campionaria.

Esercizio 5

Un esame è composto da due prove delle quali la prima è scritta e la seconda è orale. I voti conseguiti dagli studenti nella prova scritta possono essere rappresentati da una v.c. X con media 24 e varianza 9, mentre i voti conseguiti nella prova orale possono essere descritti da una v.c con media 22 e varianza 6. Il docente attribuisce maggior peso alla prova scritta sicchè il voto finale è una combinazione lineare dei voti riportati nelle due prove $\frac{2}{3}X + \frac{1}{3}Y$. Sapendo che la covarianza tra X e Y è 10, calcolare la media e lo scarto quadratico medio del voto finale.

$$E\left[\frac{2}{3}X + \frac{1}{3}X\right] = \mu_{(2/3)X+(1/3)Y} = 24\frac{2}{3} + 22\frac{1}{3} = 16 + 7{,}3 = 23{,}33$$

$$Var\left[\frac{2}{3}X+\frac{1}{3}Y\right]=\left(\frac{2}{3}\right)^2\sigma_x^2+\left(\frac{1}{3}\right)^2\sigma_y^2+2\sigma_{xy}=0{,}444*9+0{,}111*6+(0{,}76*0{,}33*2*10)=$$

$$=\sigma_{(2/3)X+(1/3)Y}=3{,}03$$