Esercitazione 4 del corso di Statistica 2

Prof. Domenico Vistocco

Dott.ssa Paola Costantini

13 maggio 2008

Esercizio n 1

Il gestore di una stazione di servizio regala un gratta e vinci ad ogni cliente. Egli garantisce che ogni gratta e vinci ha probabilità 0,05 di contenere un messaggio che dà diritto a 20 euro di benzina gratuiti. Un automobilista decide di far rifornimento sempre nella stessa stazione finché non ottiene un gratta e vinci con il messaggio vincente.

a) qual è la probabilità che un gratta e vinci con il messaggio vincente si verifichi al quinto acquisto di benzina?
b) Qual è il numero medio di acquisti di benzina che l'automobilista deve effettuare affinché si verifichi il gratta e vinci con il messaggio vincente?

Soluzione

a) La funzione di probabilità della v.c. geometrica è $P(X = x) = (1 - p)^{x-1} p$, da cui:

$$P(X = 5) = (1 - 0,05)^{5-1} * 0,05 = 0,0407$$

b) Il valore atteso di X è E[X]= $\frac{1}{p} = \frac{1}{0,05} = 20$ acquisti di benzina.

Esercizio n 2

Il numero di studenti che si presentano presso la segreteria di un grande Ateneo ha una distribuzione di Poisson. In media si presentano 3 studenti al minuto,

a) Qual' è la probabilità che in un minuto arrivi almeno uno studente?
b) Qual' è la probabilità che in due minuti non arrivi alcuno studente?
c) Qual' è la probabilità che in tre minuti arrivino 15 studenti?
d) Qual' è iol numero medio di studenti in un'ora?

Soluzione

Formalmente $P(X = x) = \dfrac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!}$

a. $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) =$

$$P(X = 0) = \frac{e^{-3}3^{0}}{0!} = 0{,}0498 \Rightarrow 1 - 0{,}0498 = 0{,}9502$$

b. Se il numero di studenti che entrano in segreteria è pari a $\lambda_1 = E[X_1] = 3$, di conseguenza la v.c. che descrive il numero di studenti in 2 minuti è $X_2 \sim P(\lambda_2)$ dove $\lambda_2 = 2\lambda_1 = 6$

$$P(X = 0) = \frac{e^{-6}6^{0}}{0!} = 0{,}0025$$

c. $X_3 \sim P(\lambda_3)$ dove $\lambda_3 = 3\lambda_1 = 9$

$$P(X = 15) = \frac{e^{-9}9^{15}}{15!} = 0{,}0194$$

d. Se supponiamo λ = 3 studenti al minuto, allora in un'ora λ = 3*60=180 studenti.

Esercizio n 3

Un mazzo di carte francesi è composto da 52 carte, fra le quali vi sono 13 carte di fiori e 4 assi. Un giocatore sceglie a caso, senza rimessa, 5 carte da mazzo,

a. qual è a probabilità che siano tutte carte di fiori?

b. qual è la probabilità che 4 delle 5 carte siano assi?

Svolgimento

Quando l'estrazione avviene in blocco (senza reimmissione) la v.c. che descrive il numero di unità favorevoli nelle *n* estrazioni è *ipergeometrica*. La sua distribuzione dipende da 3 parametri: N = numero complessivo delle unità, F = casi favorevoli e n = numero di estrazioni.

$$X \sim \mathrm{IP}(N; F; n)$$

La probabilità che X assuma valore x si calcola come rapporto tra casi favorevoli e casi possibili.

$$P(X=x)=\frac{\binom{F}{x}\binom{N-F}{n-x}}{\binom{N}{n}}=\frac{\frac{F!}{x!(F-x)!}\frac{(N-F)}{(n-x)!(N-F-n+x)!}}{\frac{N!}{n!(N-n)!}}$$

a. $X \sim \mathrm{IP}(52;13;5)$

$$P(X=5)=\frac{\binom{13}{5}\binom{52-13}{5-5}}{\binom{52}{5}}=\frac{\frac{13!}{5!(13-5)!}\frac{(52-13)}{(5-5)!(52-13-5+5)!}}{\frac{52!}{5!(52-5)!}}=0{,}000495$$

b. $X \sim \mathrm{IP}(52;4;5)$

$$P(X=4)=\frac{\binom{4}{4}\binom{52-4}{5-4}}{\binom{52}{5}}=\frac{\frac{4!}{4!(4-4)!}\frac{(52-4)}{(5-4)!(52-4-5+4)!}}{\frac{52!}{5!(52-5)!}}=0{,}0000184$$

Esercizio n 4

Si consideri un'urna composta da 12 palline: 5 verdi, 4 rosse e 3 blu. Si supponga di estrarre a caso, senza reimmissione, 3 palline dsall'urna:

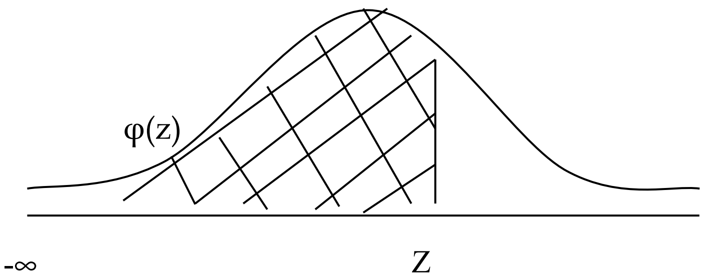
Qual è la probabilità che siano tutte blu?

$X \sim \mathrm{IP}(12;3;3)$

$$P(X=3)=\frac{\binom{3}{3}\binom{12-3}{3-3}}{\binom{12}{3}}=\frac{\frac{3!}{3!(3-3)!}\frac{(12-3)}{(3-3)!(12-3-3+3)!}}{\frac{12!}{3!(12-3)!}}=0{,}0045$$

ESERCIZI SULLA V.C. NORMALE

$\varphi(z) = P(Z \leq z)$ con $Z \sim N(0,1)$

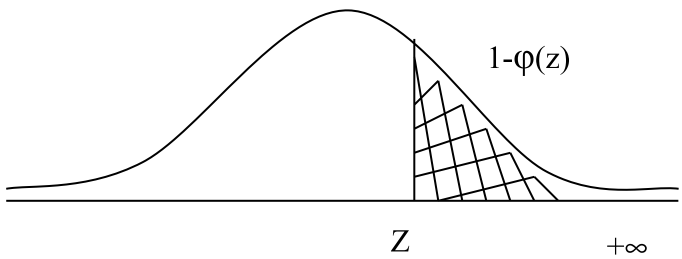


Calcolare:

$P(Z \leq 0{,}99) = \varphi(0{,}99) = 0{,}8389$

$P(Z \leq 1{,}36) = \varphi(1{,}36) = 0{,}9131$

$\varphi(z) = P(Z \leq z)$ con $Z \sim N(0,1)$

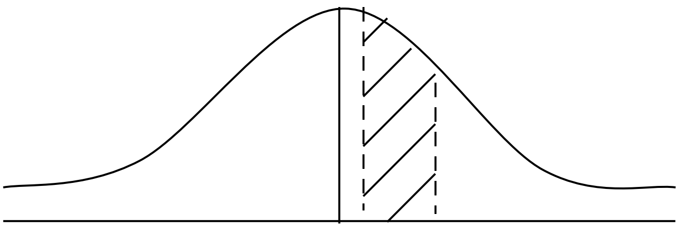


Calcolare:

$P(Z \leq 0{,}99) = \varphi(0{,}99) = 0{,}8389$

$P(Z \leq 1{,}36) = \varphi(1{,}36) = 0{,}9131$

IN UN QUALSIASI INTERVALLO



Calcolare

$P(0,5 < Z < 1)$ $\varphi(1) = 0,8413$
$\varphi(0,5) = 0,6914$

$\varphi(1) - \varphi(0,5)$

$P(0,6914 < Z < 0,8413) = P(0,8413 - 0,6914) = 0,1499 \cong$ **15%**

Calcolare:

$P(0,63 < Z < 1,77)$ $\varphi(1,77) = 0,9616$
$\varphi(0,63) = 0,7357$

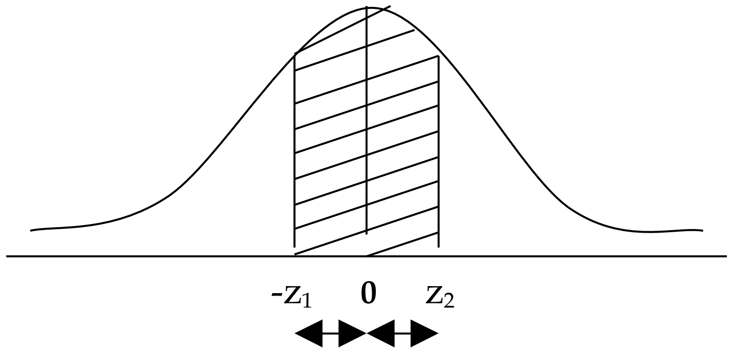
$\varphi(1,77) - \varphi(0,63)$
$P(0,7357 < Z < 0,9616) = P(0,9616 - 0,7357 = 0,2259 \cong$ **22%**

L'INTERVALLO E' A CAVALLO DI μ

$Z \sim N(0,1)$ calcolare $(z_1 < Z < z_2)$

$P(z_1 < Z < z_2) = P(z_1 < Z < 0) + P(0 < Z < z_2)$

$= \varphi(-z_1) - \varphi(0) + \varphi(z_2) - \varphi(0)$
$= \varphi(-z_1) + \varphi(z_2) - 1$



Calcolare:

$P(-1{,}1 < Z < 0{,}35)$ $\varphi(1{,}1) = 0{,}8643$
$\varphi(0{,}35) = 0{,}6368$
$\varphi(0) = 0{,}5$

$= \varphi(0{,}35) - \varphi(0) + \varphi(1{,}1) - \varphi(0)$

$P(-1{,}1 < Z < 0{,}35) = 0{,}6368 + 0{,}8643 - 1 =$ **0,5**

Calcolare:

$P(-1{,}74 < Z < 0{,}11)$ $\varphi(0{,}11) = 0{,}5438$
$\varphi(1{,}74) = 0{,}9590$
$\varphi(0) = 0{,}5$

$= \varphi(0{,}11) - \varphi(0) + \varphi(1{,}74) - \varphi(0)$

$P(-1{,}74 < Z < 0{,}11) = 0{,}9590 + 0{,}5438 - 1 =$ **0,5028**

INTERVALLI NEGATIVI

$Z \sim N(0,1)$ calcolare $(z_1 < Z < z_2)$ con z_1 e z_2 negativi

Ribalto l'area $[-z_1, -z_2]$ dall'altra parte dell'asse per la SIMMETRIA della curva

$$P(z_1 < z < z_2) = P(-z_2 < z < -z_1)$$

Calcolare:

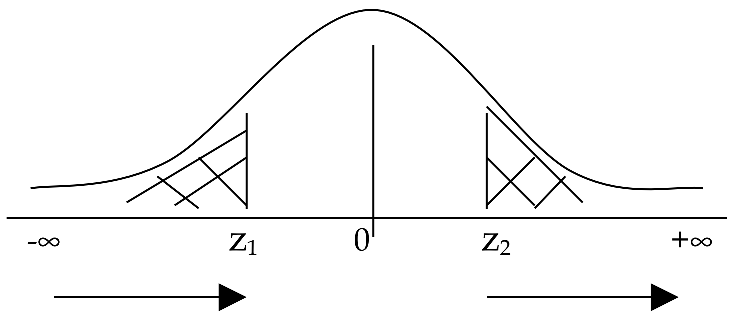
$P(-0{,}93 < Z < -0{,}8) \quad = P(0{,}8 < Z < 0{,}93)$

$\varphi(0{,}8) = 0{,}7881$
$\varphi(0{,}93) = 0{,}8238$

$P(0{,}8 < Z < 0{,}93) = \varphi(0{,}93) - \varphi(0{,}8) = (0{,}8238 - 0{,}7881) = 0{,}0357$

INTERVALLI SULLE CODE

$(-\infty$ ad $z_1)$ indica la CODA SINISTRA: $1 - \varphi(z_1)$
$(z_2$ ad $+\infty)$ indica la CODA DESTRA: $1 - \varphi(z_2)$



Calcolare

$P(Z>1{,}3)$ $\varphi\,(1{,}3) = 0{,}9032$

$P(Z>1{,}3) = 1 - 0{,}9032 = \mathbf{0{,}0968 \cong 10\%}$

Calcolare

$P(Z<2{,}325)$ $\varphi\,(2{,}325)$ = punto medio tra $\varphi\,(2{,}32)$ e $\varphi\,(2{,}33)$

$\varphi\,(2{,}32) = 0{,}9898$

$\varphi\,(2{,}33) = 0{,}9901$

$$\varphi\,(2{,}325) = \frac{0{,}9898 + 0{,}9901}{2} = 0{,}9899$$

$P(Z<2{,}325) = 0{,}9899 \cong \mathbf{99\%}$

X~N(2;9) Calcolare P(0,412<X<3,12)

$$P\,(0{,}412<X<3{,}12) = P\,\left(\frac{0{,}412-2}{3} < Z < \frac{3{,}12-2}{3}\right) = P\,(-0{,}53 < Z < 0{,}38)$$

abbiamo un estremo negativo e uno positivo

$$= \varphi\,(0{,}53) + \varphi\,(0{,}38) - 1 = P(0{,}7019) + P(0{,}6480) - 1 = \mathbf{0{,}35}$$

X~N(0;4) Calcolare P(X>4,66)

$$P(X>4{,}66) = P\,\left(\frac{x-\mu}{\sigma} > \frac{4{,}66-\mu}{\sigma}\right) = P\,\left(\frac{x-\mu}{\sigma} > \frac{4{,}66-0}{2}\right) =$$

$P(Z>2{,}33) = F(2{,}33) = 0{,}9901$

$P(Z>2{,}33) = 1-0{,}9901 = \mathbf{0{,}01} \cong \mathbf{1\%}$