Esercitazione 4 del corso di Statistica (parte seconda)

Dott.ssa Paola Costantini

12 Febbraio 2009

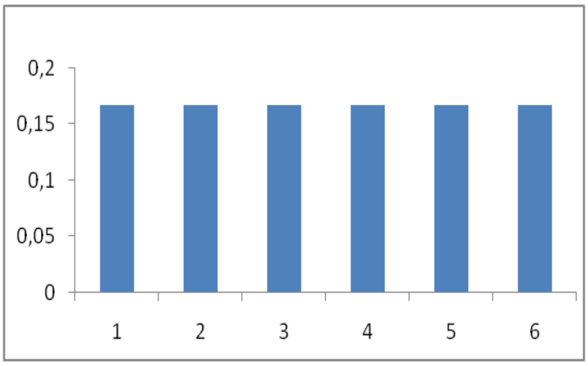
Esercizio 1

Si consideri l'esperimento lancio di un dado non truccato. Sia X la variabile casuale che assume valore pari alla faccia uscita;

1) Specificare la distribuzione di probabilità della variabile e rappresentarla graficamente
2) Calcolare valore atteso e varianza usando le definizioni generali
3) Calcolare valore atteso e varianza usando quanto noto sulla distribuzione uniforme discreta.

La variabile casuale X è rappresentata di seguito in forma tabellare e in forma grafica:

X	P(x)
1	1/6 = 0,167
2	1/6 = 0,167
3	1/6 = 0,167
4	1/6 = 0,167
5	1/6 = 0,167
6	1/6 = 0,167



Calcolo del valore atteso secondo la definizione generale:

$$E(X) = \sum_i x_i p(x_i) = 1\times\frac{1}{6} + 2\times\frac{1}{6} + \ldots + 5\times\frac{1}{6} + 6\times\frac{1}{6} = 3.5$$

Calcolo della varianza secondo la definizione generale:

$$\begin{aligned}\sigma_X^2 &= E(X-\mu)^2 \\ &= \sum_i (x_i-\mu)^2 p(x_i) \\ &= (1-3.5)^2\times\frac{1}{6} + \ldots + (6-3.5)^2\times\frac{1}{6} \\ &= 2.91667\end{aligned}$$

La variabile casuale X è una variabile casuale uniforme discreta: X ~ Ud(6)

E′ possibile calcolarne il valore atteso come di seguito indicato:

$$E(X) = \frac{n+1}{2} = \frac{6+1}{2} = 3.5$$

e la sulla varianza come:

$$\sigma_X = E(X-\mu)^2 = \frac{n^2-1}{12} = \frac{6^2-1}{12} = 2.91667$$

Esercizio n. 2

Il tempo di percorrenza del treno che collega la stazione di Roma Termini con l'aeroporto di Fiumicino è di 30 minuti esatti. Il percorso è lungo 30 km. e la velocità di percorrenza è costante durante tutta la tratta.
a) Si è interessati a valutare la probabilità che il treno interrompa la corsa tra il 15-mo km. ed il 19-mo km. per un guasto improvviso. Quanto vale tale probabilità?
b) Calcolare il valore atteso e la varianza della distribuzione di riferimento.

a) Poiché la velocità di percorrenza del treno è costante è lecito attendersi che la probabilità che il treno interrompa improvvisamente la corsa per un guasto improvviso è costante durante tutta la tratta di percorrenza, e quindi pari ad 1/30. La variabile casuale di riferimento X "il treno arresta la sua corsa all'i-mo km. per un guasto improvviso" è quindi la uniforme continua.

a=0,   b=30:   X ~ U(0, 30)

$$F(19) = \int_0^{19} f(x)dx = \frac{19-0}{30-0} = 0{,}633 \qquad F(15) = \int_0^{15} f(x)dx = \frac{15-0}{30-0} = 0{,}5$$

P(15 ≤ X ≤ 19) = F(19) – F(15) = 0,633 – 05 = 0,133

b) Calcolare il valore atteso e la varianza della distribuzione di riferimento.

$$E(X) = \frac{a+b}{2} = \frac{30}{2} = 15 \qquad Var(X) = \frac{(b-a)^2}{12} = \frac{30^2}{12} = \frac{900}{12} = 75$$

Esercizio n. 3

Un venditore di elettrodomestici a domicilio sa che in ogni visita la probabilità che riesca a convincere il cliente ad acquistare un elettrodomestico è 0,35. L'esito di ogni visita è indipendente da quello delle altre. Il venditore ha programmato 5 visite; si vuole calcolare la distribuzione di probabilità del numero di elettrodomestici che riesce a vendere. Sia X la v.c. che descrive questo esperimento, abbiamo che X ha una distribuzione binomiale con n=5 e p=0,35 cioè:

$$X \sim Bin(5; 0,35)$$

La funzione di probabilità è data da:

$$P(X=x)=\binom{n}{x}p^x(1-p)^{n-x}=\frac{n!}{x!(n-x)!}p^x(1-p)^{n-x}$$

Da cui

$$P(X=0)=\frac{5!}{0!5!}0,35^0(1-0,35)^5=0,116$$
$$P(X=1)=\frac{5!}{1!4!}0,35^1(1-0,35)^4=0,312$$

$$P(X=2)=\frac{5!}{2!3!}0,35^2(1-0,35)^3=0,337$$

$$P(X=3)=\frac{5!}{3!2!}0,35^3(1-0,35)^2=0,181$$

$$P(X=4)=\frac{5!}{4!1!}0,35^4(1-0,35)^1=0,049$$

$$P(X=5)=\frac{5!}{5!0!}0,35^5(1-0,35)^0=0,005$$

Si vuole inoltre calcolare in media quanti elettrodomestici il venditore si aspetta di vendere.

Il valore atteso di una variabile Binomiale è dato da: E[X] = n*p, per cui nel nostro caso abbiamo:

$$E[X] = 5*0,35=1,75$$

Infine si vuole calcolare la probabilità che il venditore venda almeno un elettrodomestico.

Per calcolare la probabilità dell'evento $P(X \geq 1)$=si osservi che $P(X=0)$ è la sua negazione. Il modo più rapido per calcolare la probabilità desiderata è:

$P(X \geq 1) = 1 - P(X=0)$

Sapendo che $P(X=0)=0{,}116$ di conseguenza abbiamo che $P(X \geq 1) = 1 - 0{,}116 = 0{,}884$

Esercizio n. 4

La probabilità che una persona ospite di un famoso centro benessere di Ischia sia soddisfatta del trattamento ricevuto è pari a 0,9. Si intervistano a caso 500 persone e si chiede loro cosa ne pensano del trattamento ricevuto. Determinare la probabilità che ci siano almeno 440 soggetti dichiaratisi soddisfatti.

Soluzione

Grazie al Teorema di De Moivre - Laplace è possibile approssimare la Binomiale alla variabile casuale Normale e di conseguenza alla v.c. Normale Standardizzata.

Poiché la variabile casuale Binomiale ha valore atteso pari a

$$E(X) = n * p = 500 * 0{,}9 = 450$$

e varianza

$$Var(X) = n * p * (1 - p) = 45$$

possiamo procedere all'operazione di standardizzazione.

Quindi $P(X > 440 + 0{,}5)$:

$$Z = \left(\frac{440{,}5 - 450}{\sqrt{45}} \right) = -1{,}416$$

(Si aggiunge 0,5 poiché i valori della binomiale sono discreti, mentre quelli della normale sono continui).

La $P(Z > -1{,}416)$ è 0,9207.