Esercitazione 5 del corso di Statistica 2

Dott.ssa Paola Costantini

29 febbraio 2012

Esercizio 1

Si dispone di un campione casuale costituito da n=300 assemblaggi. Di questi un numero x=10 presenta dei difetti. Si determini un intervallo di confidenza al 95% per la probabilità di successo incognita.

N=500

P=10/500=0,02

1-p=0.98

α=0,05

α/2=0,025

$z_{\alpha/2}$=1,96

$$P\left(p - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{p(1-p)}{N}} \le \pi \le p + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{p(1-p)}{N}}\right) = 1-\alpha$$

$$P \pm z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{p(1-p)}{N}} = 0{,}02 \pm 1{,}96\sqrt{\frac{0{,}02 \times 0{,}98}{500}} = 0{,}02 \pm 0{,}0123$$

$$\pi\left[0{,}0077;0{,}0323\right]$$

Esercizio n 2

Un'azienda vuole stimare la quota di mercato π che occupa il suo prodotto. A tal fine intervista un campione di n=100 potenziali clienti, di cui il 10% è effettivamente costituito da suoi acquirenti.

a) Determinare un intervallo di confidenza al 99% per la sua quota di mercato π
b) Qual è la numerosità minima per un errore massimo del 5% ed un rischio di errore del 10%

a)

α=0,01

$\alpha/2$=0,005

$z_{0,005}$=2,58

L'intervallo di confidenza per la proporzione π è ottenuto da:

$$P\left(p - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{p(1-p)}{N}} \le \pi \le p + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{p(1-p)}{N}}\right) = 1-\alpha$$

$$P\left(0{,}10 - 2{,}58\sqrt{\frac{0{,}10(1-0{,}10)}{100}} \le \pi \le 0{,}10 + 2{,}58\sqrt{\frac{0{,}10\times(1-0{,}10)}{100}} = 0{,}02 \pm 0{,}0123\right) = 0{,}99$$

$IC_{0,99}$=[2,26; 17,74]

b)

Le quantità note sono

E=0,05

α=0,10

$\alpha/2$=0,05

$z_{0,05}$=1,65

Dal momento che non ci sono informazioni né sulla vera proporzione, né sulla sua varianza, ci si pone nell'ipotesi più pessimistica, ossia di una proporzione π pari a 0,5 (ipotesi di massima incertezza sul fenomeno) cui corrisponde il valore massimo per la varianza

$$\sigma_x^2 = \pi(1-\pi) = 0{,}5^2 = 0{,}25$$

In tal caso la numerosità dovrà essere:

$$n > \frac{z_{0,05}^2 \times \sigma_x^2}{e^2} = \frac{1{,}65^2 \times 0{,}25}{0{,}05^2} = 270{,}6$$

Ossia non inferiore a 271 unità

Esercizio n 3

Ad un concorso risulta che un campione di 18 candidati ha impiegato in media 24 minuti per rispondere ad una batteria di test attitudinali.

Determinare un intervallo di confidenza al 95% per il tempo medio di risposta ai test di tutti i candidati al concorso considerando che il tempo di risposta misurato su tutta la popolazione dei candidati è distribuito normalmente con varianza pari a 10. Determinare l'effetto dell'aumento del livello di confidenza sulla lunghezza dell'intervallo.

N=18 $\bar{x}$=24 $1-\alpha$ = 0,95 $z_{\alpha/2}$ σ_x^2=10 σ =3,16

$$P\left(\bar{x} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{x} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

$$P\left(24 - 1{,}96\frac{3{,}16}{\sqrt{18}} \leq \mu \leq 24 + 1{,}96\frac{3{,}16}{\sqrt{18}}\right)$$

$P(22{,}54 \leq \mu \leq 25{,}46) = 0{,}95$

Esercizio 4

Si vuole stimare la spesa media mensile per spostamenti delle famiglie di un piccolo paese. Un campione di n=100 famiglie è caratterizzato da una spesa media di 60 euro. Assumendo che la spesa segue una distribuzione Normale con varianza =128, determinare l'intervallo di confidenza per la spesa media di tutte le famiglie del paese per i livelli di confidenza 90% e 95%.

Soluzione

<u>Popolazione normale, varianza nota</u>

$$X \sim N(\mu, 128)$$

Quindi l'intervallo di confidenza è determinato a partire dalla seguente relazione:

$$P\left(\bar{x} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{x} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

In cui $\bar{x}$ =60

a)

α = 0,10

α/2=0,05

$z_{\alpha/2}$ = 1,65

$$P\left(60-1{,}65\frac{11{,}31}{\sqrt{100}}\le \mu \le 60+1{,}65\frac{11{,}31}{\sqrt{100}}\right)=0{,}9$$

L'intervallo di confidenza al 90% per la media è dunque

$IC_{0,9}$=[58,139; 61,86]

b)

α = 0,05

α/2=0,025

$z_{\alpha/2}$ = 1,96

$$P\left(60-1{,}96\frac{11{,}31}{\sqrt{100}}\le \mu \le 60+1{,}96\frac{11{,}31}{\sqrt{100}}\right)=0{,}95$$

L'intervallo di confidenza al 90% per la media è dunque

$IC_{0,9}$=[57,8; 62,2]

Esercizio 5

Un campione casuale di n=9 unità estratto da una popolazione Normale ha una media $\bar{x}$ =120 e una varianza campionaria corretta s^2 =900.

a) Determinare l'intervallo di confidenza al 99% per la media della popolazione;
b) Determinare l'intervallo nell'ipotesi che il campione sia di 100 unità.

a) Popolazione normale, varianza non nota

X~N(μ, s^2)
$\bar{x}$ =120

$$P\left(\overline{\bar{x}-\frac{t_{\alpha/2},n-1\cdot s}{\sqrt{n}}} \le \mu \le \bar{x}+\frac{t_{\alpha/2},n-1\cdot s}{\sqrt{n}}\right)=1-\alpha$$

α = 0,01

α/2=0,005

n=9

$z_{0,0058}$ = 3,3555

$$P\left(120-3{,}3555\frac{30}{\sqrt{9}} \le \mu \le 120+3{,}3555\frac{30}{\sqrt{9}}\right)=0{,}99$$

$IC_{0,9}$=[86,45,153,55]

b)

Popolazione Normale n>30 varianza non nota

α = 0,01

α/2=0,005

n=100

$t_{0,005,\,99}$ = 2,6264

$$P\left(\overline{\bar{x}-\frac{t_{\alpha/2},n-1\cdot s}{\sqrt{n}}} \le \mu \le \bar{x}+\frac{t_{\alpha/2},n-1\cdot s}{\sqrt{n}}\right)=1-\alpha$$

$$P\left(120-2{,}6264\frac{30}{\sqrt{100}} \le \mu \le 120+2{,}6264\frac{30}{\sqrt{100}}\right)=0{,}99$$

$IC_{0,9}$=[112,12,127,88]

In alternativa, dal momento che la distribuzione t di Student all'aumentare del numero di gradi di libertà tende ad assomigliare sempre più ad una Normale, essendo il campione abbastanza ampio n>30 è possibile utilizzare anche la Normale standardizzata.

$$P\left(\bar{x} - z_{\alpha/2}\frac{s}{\sqrt{n}} \le \mu \le \bar{x} + z_{\alpha/2}\frac{s}{\sqrt{n}}\right)$$

$z_{0,005} = 2,58$

$$P\left(120 - 2,58\frac{30}{\sqrt{100}} \le \mu \le 120 + 2,58\frac{30}{\sqrt{100}}\right) = 0,99$$

$IC_{0,9}=[112,26,127,74]$